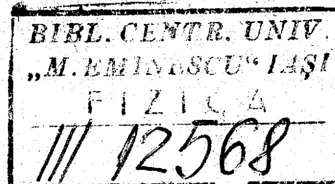
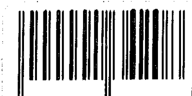


UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA" IAŞI
FACULTATEA DE FIZICĂ
CATEDRA DE OPTICĂ-SPECTROSCOPIE

Gh.N. Singurel

FIZICA LASERILOR

Ediţie revăzută şi adăugită



EDITURA UNIVERSITĂŢII „ALEXANDRU IOAN CUZA"
IAŞI – 2001

Referenţi:

Prof. Dr. **Mihai TOMA** – Facultatea de Fizică

Prof. Dr. **Mitachi STRAT** – Facultatea de Fizică

Prof. Dr. **Mihai DELIBAŞ** – Facultatea de Fizică

Autorul exprimă mulţumiri referenţilor pentru efortul depus şi mai ales pentru observaţiile utile efectuate.

Cap. I

TEORIA CLASICĂ A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC AL RADIAŢIILOR OPTICE

1. Ecuaţiile lui Maxwell.

La baza explicării din punct de vedere clasic a radiaţiei electromagnetice (*em*) se află teoria câmpului *em* fundamentată de către J.C. Maxwell şi publicată în anul 1864. Ecuaţiile lui Maxwell reprezintă baza descrierii tuturor fenomenelor *em* clasice. Câmpul *em* este descris de comportarea în timp şi spaţiu a celor două mărimi vectoriale ce-l definesc: $\mathbf{e}$ - intensitatea câmpului electric şi $\mathbf{b}$ - inducţia câmpului magnetic. Ecuaţiile realizează legătura dintre mărimile vectoriale ce caracterizează câmpul *em* într-un punct dat al spaţiului, la un moment dat, şi caracteristicele ansamblului de sarcini electrice în mişcare, care determină existenţa acestui câmp. Ele au forma următoare:

$$\text{(1.1)}\qquad \text{a)}\ \nabla\times\mathbf{e}=-\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\qquad \text{b)}\ \nabla\cdot\mathbf{e}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{c)}\ \nabla\times\mathbf{b}=\mu_0\mathbf{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}\qquad \text{d)}\ \nabla\cdot\mathbf{b}=0$$

Ecuaţiile Maxwell exprimă faptul că existenţa câmpului electric poate fi determinată de prezenţa unor sarcini electrice statice sau de variaţia în timp a unui câmp magnetic, în timp ce existenţa unui câmp magnetic este determinată de prezenţa unor curenţi electrici permanenţi sau de variaţia în timp a unui câmp electric. De asemenea scot în evidenţă faptul că sarcina electrică şi curentul electric satisfac ecuaţia de continuitate (fluxul densităţii de curent electric ($\mathbf{j}$) printr-o suprafaţă închisă este egal cu variaţia în timp a densităţii de sarcină electrică (ρ) închisă de către suprafaţă). Aplicând operatorul ($\nabla\cdot$) ecuaţiei (1.1c), se obţine:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0,$$

sau folosind (1.1b) şi inversând derivatele faţă de coordonate şi timp, relaţia devine:

(1.2) $$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Dacă la setul de ecuaţii Maxwell se adaugă relaţia:

(1.3) $$\mathbf{F} = \mathrm{m}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \text{ unde: } \mathbf{j} = \rho \mathbf{v},$$

care descrie mişcarea în câmp *em* a ansamblului a cărui unitate de masă este m şi densitate de sarcină electrică (ρ), atunci setul de relaţii obţinut descrie complet dinamica clasică a interacţiunii dintre particulele încărcate electric şi câmpul *em*. In relaţia (1.3) câmpul electric reprezintă atât câmpul extern ce acţionează asupra sarcinii, cât şi cel creat de sarcina electrică. Deoarece acţiunea câmpului propriu asupra sarcinii este mică, în primă aproximaţie, se poate considera numai câmpul extern.

Ecuaţiile Maxwell reprezintă un set de ecuaţii diferenţiale, cu derivate parţiale de ordinul întâi, liniare, cuplate, care leagă componentele câmpului electric şi ale inducţiei magnetice. Pentru a uşura rezolvarea, acestea pot fi reduse la două relaţii mai simple: una care conţine numai o mărime vectorială, iar cealaltă numai o mărime scalară. In acest scop se introduc două mărimi noi: *potenţialul-vector* şi *potenţialul-scalar* prin care mărimile iniţiale (câmpul electric şi inducţia magnetică) se exprimă funcţie de derivatele temporale şi spaţiale ale noilor mărimi.

Din relaţia (1.1d), pe baza relaţiei vectoriale: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$, rezultă că vectorul inducţie magnetică poate fi exprimat, folosind potenţialul-vector $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$, prin relaţia:

(1.4a) $$\mathbf{b}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r},t),$$

unde $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ reprezintă o mărime vectorială dependentă atât de coordonate cât şi de timp.

Relaţia (1.1a), utilizând (1.4a), devine:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{a}) = -\left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right), \text{ sau: } \nabla \times \left(\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) = 0.$$

Folosind relaţia vectorială: $\nabla \times \nabla \Phi = 0$ (unde Φ este o funcţie scalară), acest rezultat poate fi scris sub forma:

(1.4b) $$\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad \text{sau} \quad \mathbf{e} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t},$$

unde $\Phi(\mathbf{r},t)$ reprezintă potenţialul-scalar, o mărime scalară dependentă atât de coordonate cât şi de timp. Deci pentru a descrie câmpul *em* prin intermediul vectorilor $\mathbf{e}$ şi $\mathbf{b}$ sunt necesare, în loc de şase mărimi, numai patru: potenţialul-scalar şi potenţialul-vector, care reprezintă trei mărimi scalare.

Folosind noile mărimi, celelalte două ecuaţii Maxwell se transformă după cum urmează. Relaţia (1.1c) devine:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right), \text{ sau:}$$

(1.5a) $$\nabla^2 \mathbf{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{j},$$

iar relaţia (1.1b):

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ sau: } \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{a}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(se adaugă în ambii membrii termenul: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$)

(1.5b) $$\nabla^2 \Phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right).$$

In acest mod setul de patru ecuaţii Maxwell s-a redus la două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, care sunt cuplate. Pentru a înlătura cuplajul se foloseşte arbitrariul introdus în definiţia potenţialelor. Din relaţia (1.4a) reiese că vectorul inducţie $\mathbf{b}$ nu se modifică dacă potenţialul-vector se consideră de forma:

(1.6a) $$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla \Psi,$$

unde Ψ este o funcţie scalară arbitrară, deoarece: $\nabla \times \nabla \Psi = 0$. Pentru a nu se modifica nici expresia intensităţii câmpului electric, potenţialul-scalar (1.4b) capătă forma:

$$\mathbf{e} = -\nabla \Phi + \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial t} = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial t}, \text{ unde:}$$

(1.6b) $$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Noile potenţiale $\mathbf{a}'(\mathbf{r},t)$ şi $\Phi'(\mathbf{r},t)$ sunt echivalente cu cele anterioare, deoarece descriu aceleaşi câmpuri reale. Pe această bază potenţialele $\mathbf{a}(\mathbf{r},t)$ şi $\Phi(\mathbf{r},t)$ se aleg astfel încât să satisfacă relaţia:

(1.7) $$\nabla \cdot \mathbf{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

In aceste condiţii relaţiile (1.5a,b) devin:

(1.8a) $$\nabla^2 \mathbf{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j};$$

(1.8b) $$\nabla^2\Phi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Pentru mărimile **a** şi Φ s-au obţinut două ecuaţii diferenţiale neomogene, necuplate între ele (asemănătoare cu ecuaţia undei). Potenţialele **a** şi Φ sunt legate prin condiţia (1.7), care reprezintă *condiţia de calibrare (etalon)* a lui Lorentz. Transformările (1.6a,b) poartă denumirea de *transformările de calibrare*, iar invarianţa mărimilor **e** şi **b** faţă de aceste transformări poartă denumirea de *invarianţă de calibrare*. Calibrarea Lorentz este invariantă faţă de transformările Lorentz din mecanica relativistă, adică este independentă de sistemul de coordonate ales. Daca câmpurile electrice şi magnetice sunt constante în timp, ecuaţiile (1.1a,b) capătă o formă mai simplă:

(1.9) a) $\nabla\times\mathbf{e} = 0$ (b) $\nabla\cdot\mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Relaţia (1.9a), prin intermediul potenţialului-scalar, conform relaţiei (1.4b), permite exprimarea intensităţii câmpului electric sub forma:

$$\mathbf{e} = -\nabla\Phi,$$

iar relaţia (1.9b) devine:

(1.10) $$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

adică potenţialul-scalar satisface ecuaţia Poisson. Dacă câmpul electric este considerat în vid $(\rho = 0)$, potenţialul-scalar satisface ecuaţia Laplace:

(1.11) $$\nabla^2\Phi = 0.$$

Dacă ansamblul considerat este format din sarcini electrice discrete (q_i), atunci potenţialul-scalar creat de acestea, într-un punct dat, are forma:

(1.12) $$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i},$$

unde r_i reprezintă distanţa de la sarcina q_i la punctul unde se evaluează potenţialul-scalar. Dacă se consideră o distribuţie continuă de sarcină, potenţialul-scalar este exprimat prin relaţia:

(1.13) $$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dV,$$

unde r este distanţa de la elementul de volum dV la punctul de observare.

Pentru a analiza cazul câmpului magnetic constant, este necesar să se considere un ansamblu de sarcini electrice care efectuează o mişcare finită, adică particulele rămân tot timpul într-un domeniu finit al spaţiului. Câmpul magnetic mediat în timp,

creat de acest ansamblu, va fi constant (nu va depinde de timp), fiind funcţie numai de coordonate. Ecuaţiile Maxwell (1.1c,d), mediate în timp, au forma:

(1.14) a) $\nabla\times\overline{\mathbf{b}} = \mu_0\overline{\mathbf{j}}$ b) $\nabla\cdot\overline{\mathbf{b}} = 0,$

unde media în timp a derivatei $\overline{\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial e}}$ este egală cu zero, deoarece mărimea **e** variază într-un interval finit. Folosind (1.4a), relaţia (1.14a) devine:

$$\nabla\times(\nabla\times\overline{\mathbf{a}}) = \nabla\nabla\cdot\overline{\mathbf{a}} - \nabla^2\overline{\mathbf{a}} = \mu_0\overline{\mathbf{j}}.$$

Deoarece potenţialul-vector nu este determinat univoc se poate impune condiţia suplimentară de forma $\nabla\cdot\overline{\mathbf{a}} = 0$; relaţia care determină potenţialul-vector al câmpului magnetic constant capătă forma ecuaţiei Poisson:

$$\nabla^2\overline{\mathbf{a}} = -\mu_0\overline{\mathbf{j}}.$$

Soluţia acestei ecuaţii, analoagă cu (1.10), este:

(1.15) $$\overline{\mathbf{a}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\overline{\mathbf{j}}(\mathbf{r})}{r} dV,$$

unde r - distanţa de la elementul de volum dV până la punctul de observare a câmpului. Dacă ansamblul de sarcini prezintă o distribuţie discretă, se poate scrie relaţia:

(1.16) $$\overline{\mathbf{a}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{r_i},$$

unde r_i - distanţa de la sarcina q_i la punctul de observare.

In cazul câmpului magnetic sau electric constant în timp, condiţia (1.7) se transformă în $\nabla\cdot\mathbf{a} = 0$, cunoscută sub denumirea de *calibrarea Coulomb* (*calibrarea radiaţiei* sau *calibrarea transversală*). Această calibrare se utilizează atunci când se consideră un sistem de referinţă faţă de care ansamblul care interacţionează cu radiaţia se află în repaus.

In cazul câmpului *em* în vid $(\rho = 0)$, ecuaţiile (1.8a,b) se transformă în ecuaţii de undă omogene:

(1.17a) $$\nabla^2\mathbf{a} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial t^2} = 0$$

(1.17b) $$\nabla^2\Phi - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

In acest caz potenţialelor li se pot impune condiţiile:

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = 0 \quad \text{şi} \quad \Phi = 0.$$

Asemenea potențiale satisfac și condiția (1.7), deci în cazul câmpului *em* în spațiul fără sarcini, calibrarea Coulomb coincide cu cea a lui Lorentz. Câmpurile electrice și magnetice vor fi date de relațiile:

(1.18) $$\mathbf{e} = -\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} \quad \text{și} \quad \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Ecuațiile (1.17) sunt de tipul ecuațiilor de undă, potențialul-vector care satisface ecuația fiind de forma:

(1.19) $$\mathbf{a} = \mathrm{Re}\{\tilde{\mathbf{A}} \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\}.$$

Soluția ecuației neliniare omogene reprezintă suma soluțiilor ecuației, fără partea dreaptă, și integrala particulară a ecuației cu partea dreaptă diferită de zero. Soluția ecuației pentru potențiale cu surse diferite de zero este de forma:

(1.20a) $$\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\bar{\mathbf{j}}(t')}{\mathrm{r}} dV + \mathbf{a}_0,$$

(1.20b) $$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(t')}{\mathrm{r}} dV + \Phi_0,$$

unde $\mathbf{a}_0$ și Φ_0 reprezintă soluția ecuației fără partea dreaptă. In această ecuație, mărimea $t' = t - \frac{\mathrm{r}}{c}$ semnifică faptul că se consideră valoarea densității de sarcină și de curent electric din elementul de volum dV la momentul t', anterior momentului t, când se determină valoarea câmpului; mărimea $\frac{\mathrm{r}}{c}$ reprezintă intervalul de timp necesar propagării câmpului *em* de la sursă până la punctul de observare.

2. Radiația *em* emisă de către un ansamblu de sarcini electrice.

Considerăm un ansamblu de sarcini electrice (q_i), aflate într-o mișcare complexă și continuă, localizat într-un volum determinat. Ansamblul este caracterizat prin densitatea de sarcină electrică $\rho(\mathbf{r}, t)$ definită în punctul poziționat prin vectorul $\mathbf{r}$, la momentul t' (fig. 1). Dacă densitatea de sarcină electrică prezintă variații în timp, ansamblul de sarcini trebuie caracterizat și prin densitatea de curent electric $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t')$. Sarcinile electrice prezentând o mișcare cu viteză variabilă, conform electrodinamicii clasice, emit radiații *em*.

Să analizăm câmpul *em* creat de ansamblu într-un punct $\mathrm{M}(\mathbf{R}_0)$, situat în vid la o distanță mare față de dimensiunile acestuia și față de lungimea de undă a radiației *em* emise. In sistemul de coordonate considerat, punctul M este poziționat prin

vectorul $\mathbf{R}_0$, a cărui direcție este dată de versorul $\mathbf{n}$. Poziția elementului de volum dV este dată de vectorul $\mathbf{r}$, iar cea a punctului M față de acest element este $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$. In primă aproximație, în condiția $\mathrm{R}_0 \rangle\rangle \mathrm{r}$, se poate considera:

$$\mathrm{R} = |\mathbf{R} - \mathbf{r}| \cong \mathrm{R}_0 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}.$$

Pentru a calcula intensitatea câmpului electric și inducția câmpului magnetic a câmpului *em* în punctul $\mathrm{M}(\mathbf{R}_0)$ la momentul t, este necesar să se cunoască expresiile corespunzătoare ale potențialului-scalar și potențialului-vector. Aceste expresii sunt date de relațiile (1.13, 1.15 sau 1.12, 1.16) și sunt determinate de structura ansamblului de sarcini la momentul $t' = t - \frac{\mathrm{r}}{c}$. La numitorul acestor relații se poate neglija mărimea $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})$ față de mărimea R_0, dar în argumentul densității de sarcină nu se poate efectua o asemenea aproximație. In expresia argumentului prezintă importanță valoarea cu care se modifică mărimea densității în intervalul de timp $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}$, și nu mărimea valorii $\frac{\mathrm{R}_0}{c}$ față de mărimea $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}$.

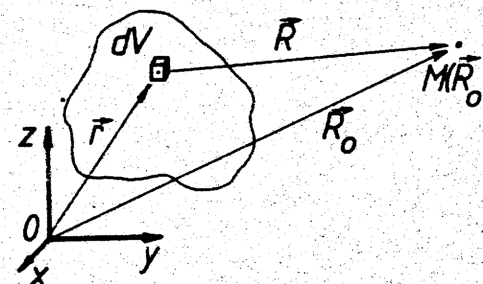


Fig. 1

In aceste condiții expresia potențialului-vector este:

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') = \frac{\mu_0}{4\pi \mathrm{R}_0}\int_V \mathbf{j}\left(t - \frac{\mathrm{R}_0}{c} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}\right) dV,$$

care, dacă se dezvoltă în serie cu limitare la prima aproximare, devine:

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}_0,t')=$$

(2.1) $$=\frac{\mu_0}{4\pi R_0}\int_V \mathbf{j}\left(t-\frac{R_0}{c}\right)dV+\frac{\mu_0}{4\pi cR_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int_V \mathbf{j}\left(t-\frac{R_0}{c}\right)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})dV$$

Dacă ansamblul este constituit din sarcini electrice discrete, expresia (2.1) capătă forma:

(2.2) $$\mathbf{a}(\mathbf{R}_0,t')=\frac{\mu_0}{4\pi R_0}\sum_i q_i\,\mathbf{v}_i+\frac{\mu_0}{4\pi cR_0}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\sum_i q_i\,\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{n})\right],$$

unde $\mathbf{v}_i$ reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor electrice la momentul t'. Conform relației (1.4a), mărimea vectorilor inducție magnetică și intensitate a câmpului electric nu se modifică dacă potențialului-vector $\mathbf{a}$ i se adaugă un vector proporțional cu $\mathbf{n}$. Se alege acest vector sub forma:

$$-\frac{\mu_0}{24\pi cR_0}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\left[\sum_i q_i r_i^2\right]\mathbf{n}.$$

Considerând identitatea vectorială:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})]+\frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})-\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})]+\frac{1}{2}[\mathbf{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{n}]$$

expresia (2.2) devine:

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}_0,t')=$$

(2.3) $$=\frac{\mu_0}{4\pi R_0}\sum_i q_i\,\mathbf{v}_i+\frac{\mu_0}{4\pi cR_0}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\sum_i q_i\,\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{n})\right]-$$
$$-\frac{\mu_0}{24\pi cR_0}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\left[\sum_i q_i r_i^2\right]\mathbf{n}=$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi R_0}\sum_i q_i\,\mathbf{v}_i+\frac{\mu_0}{24\pi cR_0}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\left\{\sum_i q_i\left[3\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{n})-\mathbf{n}\,r_i^2\right]\right\}+$$
$$+\frac{\mu_0}{8\pi cR_0}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\sum_i q_i[(\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i)\times\mathbf{n}]\right\}=$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi R_0}\frac{\partial\mathbf{P}(t')}{\partial t'}+\frac{\mu_0}{24\pi cR_0}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}Q_n(t')+\frac{\mu_0}{8\pi cR_0}\frac{\partial}{\partial t'}[\mathbf{M}(t')\times\mathbf{n}],$$

unde: $\mathbf{P}(t')=\sum_i q_i\mathbf{r}_i(t')$ reprezintă momentul de dipol al ansamblului de sarcini electrice, $\mathbf{M}(t')=\sum_i q_i[\mathbf{r}_i(t')\times\mathbf{v}_i(t')]$ - momentul de dipol magnetic al ansamblului, iar $Q_n(t')=\sum_i q_i\left\{3\mathbf{r}_i(t')[\mathbf{r}_i(t')\cdot\mathbf{n}]-r_i^2(t')\right\}$ - produsul dintre versorul $\mathbf{n}$ și tensorul momentului de cuadrupol electric, ale cărui componente sunt:

$$Q_{\alpha\beta}=\sum_i q_i\left\{3x_i^{\alpha}x_i^{\beta}-\delta_{\alpha,\beta}\,r^2\right\}.$$

Dacă în dezvoltarea în serie a potențialului-vector după mărimea $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}$ se consideră și corecția de ordinul doi, acesteia îi corespunde radiația de octupol electric și cuadrupol magnetic, ș.a.m.d. In domeniul optic, valoarea intensității emisiei multipolilor este foarte mică și prezintă interes numai dacă emisia de dipol electric este interzisă de regulele cuantice de selecție.

Conform relației (2.3), celor trei termeni componenți ai potențialului-vector le corespund trei tipuri de radiație *em*: emisia de radiație de dipol electric, obținută în aprox. de ordinul zero a mărimii $\mathbf{a}(\mathbf{R}_0,t)$, și emisia de radiație de dipol magnetic și de cuadrupol electric, obținută în aprox. de ordinul întâi. Pentru a analiza caracteristicele câmpului *em* din punct de vedere al electrodinamicii clasice într-un punct situat departe de sursă, se poate considera un ansamblu emițător format din niște modele electro-mecanice: dipoli electrici, respectiv dipoli magnetici și cuadrupoli electrici.

Să analizăm sensul fizic al ordinului aproximației potențialului-vector. Mărimea temporală $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}$ se poate neglija, dacă în acest interval de timp distribuția sarcinilor ansamblului se modifică foarte puțin. Dacă T reprezintă mărimea intervalului de timp în decursul căruia distribuția sarcinilor s-ar modifica în mod esențial, atunci radiația emisă de sistem ar prezenta un caracter periodic, caracterizat prin perioada T. Dacă d reprezintă ordinul de mărime al dimensiunilor sistemului, pentru a nu se modifica distribuția de sarcină, este necesară condiția: $\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}\cong\frac{d}{c}\langle\langle T$. De aici se obține: $d\langle\langle cT\cong\lambda$, adică dimensiunile volumului ocupat de ansamblu trebuie să fie mici față de lungimea de undă a radiației emise. Condiția $d\langle\langle cT$ conduce la $v\cong\frac{d}{c}\langle\langle c$, unde v reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor. Dacă dimensiunile ansamblului sunt mici față de lungimea de undă a radiației emise de către acesta, sau dacă viteza de deplasare a sarcinilor este mică față de viteza radiației optice în vid,

atunci dezvoltarea potențialului-vector se poate limita la aproximația de ordin zero, cunoscută sub denumirea de *aproximația de dipol electric.*

3. Unde electromagnetice.

Dacă punctul în care se determină câmpul *em* se află la distanță mare față de sursa de radiație care satisface condițiile *aproximației de dipol electric*, pe un domeniu mic al spațiului care conține punctul, câmpul poate fi reprezentat sub formă de unde plane. Pentru ușurința calculelor în continuare se vor considera unde plane armonice, care sunt descrise de relațiile:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] \quad \text{și} \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})],$$

unde: $k(\omega) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0} n(\omega) = k_0 n(\omega) = \dfrac{\omega n(\omega)}{c}$ reprezintă vectorul de undă care în mărimea lui conține informații asupra frecvenței radiației optice și ale proprietăților optice ale mediului prin care se propagă (caracterizat prin indicele de refracție n), iar prin sensul lui indică sensul de propagare a frontului de undă.

In cazul spațiului vid, ecuațiile Maxwell au forma:

$$\text{(3.1)} \quad \text{a)} \ \nabla\times\mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad \text{b)} \ \nabla\cdot\mathbf{e} = 0 \qquad \text{c)} \ \nabla\times\mathbf{b} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad \text{d)} \ \nabla\cdot\mathbf{b} = 0$$

Considerând unde plane armonice, ecuațiile (3.1 a,c) conduc la relațiile:

$$\text{(3.2) a)} \quad -i(\mathbf{k}\times\mathbf{e}) = -i\omega\mathbf{b}, \ \text{deci:} \ \mathbf{b} = \frac{1}{\omega}(\mathbf{k}\times\mathbf{e}) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{n}\times\mathbf{e}),$$

$$\text{(3.2) c)} \quad -i(\mathbf{k}\times\mathbf{b}) = i\varepsilon_0\mu_0\mathbf{e}, \ \text{deci:} \ \mathbf{e} = -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega}(\mathbf{k}\times\mathbf{b}) = c(\mathbf{k}\times\mathbf{b}),$$

iar ecuațiile (3.1 b,d) la relațiile:

$$\text{(3.2)} \quad \text{(b)} \ -i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}) = 0 \qquad \text{(d)} \ -i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}) = 0.$$

In acest caz să stabilim legătura dintre intensitatea câmpului electric, respectiv inducția câmpului magnetic și potențialul-vector caracteristic ansamblului de sarcini considerat. Deoarece determinarea celor două mărimi se face în spațiul lipsit de sarcini electrice, potențialul-vector se exprimă, conform relației (1.19), printr-o funcție armonică:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})],$$

unde $\mathbf{A}_0$ este o mărime fizică constantă. Folosind identitatea vectorială:

$$\nabla\times(\phi\mathbf{r}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{r} + \phi(\nabla\times\mathbf{r})$$

(ϕ reprezintă o mărime scalară), relația (1.4a) devine:

$$\text{(3.3)} \quad \mathbf{b} = \nabla\times\{\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\}\mathbf{A}_0 = -i\frac{\omega}{c}(\mathbf{n}\times\mathbf{a}) = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{a}}\times\mathbf{n}),$$

unde: $\dot{\mathbf{a}} = -i\omega\mathbf{a}$ și $\nabla\times\mathbf{A}_0 = 0$ (deoarece: $\mathbf{A}_0 = ct$).

Dacă ansamblul de sarcini electrice generatoare de câmp *em*, satisface condițiile aproximației de dipol electric, potențialul-vector este de forma:

$$\text{(3.4)} \quad \mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0}\sum_i q_i \mathbf{v}_i(t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0}\dot{\mathbf{P}}_i,$$

corespunzător, inducția câmpului magnetic și intensitatea câmpului electric, devin:

$$\text{(3.5a)} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{a}}\times\mathbf{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi c R_0}[\ddot{\mathbf{P}}(t')\times\mathbf{n}] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R_0}[\ddot{\mathbf{P}}(t')\times\mathbf{n}],$$

$$\text{(3.5b)} \quad \mathbf{e} = c(\mathbf{b}\times\mathbf{n}) = (\dot{\mathbf{a}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} = \frac{\mu_0}{4\pi R_0}[\ddot{\mathbf{P}}(t')\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0}\{\ddot{\mathbf{P}}(t')[\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}] - [\ddot{\mathbf{P}}(t')\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n}\}$$

Deoarece sursa de radiație optică îndeplinește condițiile de sursă punctiformă, este util să se indice poziția punctelor în care se calculează câmpul *em* într-un sistem de coordonate sferice (r,θ,φ), iar intensitatea câmpurilor să fie reprezentată într-un sistem de coordonate orientat prin versorii $\mathbf{n}, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\varphi$ având originea în punctul de observare $M(\mathbf{R}_0)$ (fig. 2). In aceste condiții, câmpurile sunt date de relațiile:

$$\text{(3.6)} \quad \text{a)} \ \mathbf{e}(\mathbf{R}_0, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{R_0}\frac{\partial^2 P(t')}{\partial t'^2}\mathbf{n}_\theta \qquad \text{b)} \ \mathbf{b}(\mathbf{R}_0, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\sin\theta}{R_0}\frac{\partial^2 P(t')}{\partial t'^2}\mathbf{n}_\varphi$$

Aceste relații scot în evidență următoarele caracteristici.

Dacă există un ansamblu de sarcini electrice localizat într-un domeniu spațial care îndeplinește condiția de sursă punctiformă, caracterizat printr-un moment de dipol electric $\mathbf{P}(t')$, variabil în timp însă cu direcția fixă în spațiu, atunci acest sistem generează un câmp *em*, care se propagă în spațiul lipsit de substanță cu viteza $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.

La distanțe R_0 suficient de mari, vectorii $\mathbf{e}$ și $\mathbf{b}$ sunt perpendiculari pe vectorul $\mathbf{R}_0$, care exprimă direcția de propagare, deci unda *em* generată de o sursă

puntiformă este *transversală* (vectorii **e** și **b** sunt ortogonali și formează un triedru drept cu versorul **n**). Direcția de acțiune a intensității câmpului electric se află în planul format de direcția momentului de dipol electric și direcția de observare (undă liniar polarizată).

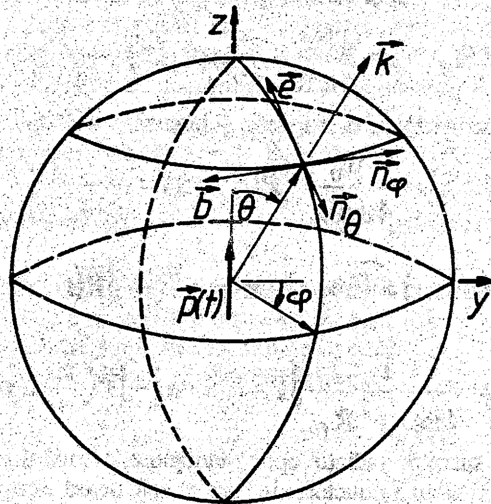


Fig. 2

Mărimile **e** și **b**, la un moment dat, au valori constante pe cercurile "paralelă" ale unei sfere ($\theta = ct$), iar pentru $\varphi = ct$ (cercuri "meridiane"), ele variază de-a lungul cercului, având valoare maximă pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ și valoare zero pentru $\theta = 0$; o sursă punctiformă nu generează câmp *em* de-a lungul direcției momentului de dipol electric. Undele ce îndeplinesc aceste condiții se numesc *unde sferice neomogene.*

Pentru câmpul *em*, deoarece $e(R_0, t) = c\, b(R_0, t)$, mărimea intensității câmpului electric este de $3 \cdot 10^8$ ori mai mare față de cea a inducției magnetice, ceea ce permite neglijarea forței de interacțiune dintre componenta magnetică și o particulă încărcată, față de interacțiunea aceleași particule cu componenta electrică.

Unda *em*, definită la momentul *t*, conține informații cu privire la procesele de mișcare ale particulelor încărcate ale ansmblului care au avut loc la momentul *t'*, deoarece momentul de dipol electric este definit la momentul $t' = t - \frac{R}{c}$, retardat cu intervalul de timp $\Delta t = R/c$ față de momentul *t*.

4. Modelul de dipol electric.

Modelul de dipol electric joacă un rol determinant în analiza pe baza electrodinamicii clasice a emisiei radiației *em* de către un ansamblu de sarcini electrice și a interacțiunii acestora cu substanța. Modelul reprezintă un sistem electro-mecanic constituit din două corpuri punctiforme (masele corpurilor pot fi diferite), încărcate cu sarcini electrice egale dar de semne opuse, dispuse la distanța **r** unul față de altul. El este caracterizat prin momentul de dipol electric, o mărime fizică vectorială, orientată de la sarcina electrică negativă spre cea pozitivă și definită conform relației:

$$\mathbf{p} = q\,\mathbf{r},$$

unde vectorul **r** este orientat de la "centrul" sarcinilor pozitive spre cel al sarcinilor negative.

Dipolul electric ca sistem fizic, în stare neperturbată, poate prezenta moment de dipol electric permanent sau acesta poate fi egal cu zero. Starea poate fi perturbată sub acțiunea unor forțe exterioare. Perturbarea constă în deformarea sistemului care determină variația ($\Delta \mathbf{r}$) a distanței dintre "centrul" sarcinilor pozitive și cel al sarcinilor negative; ca rezultat, în sistemul considerat se induce un moment de dipol electric sau se modifică momentul de dipol permanent. Forțele exterioare efectuează un lucru mecanic împotriva celor interioare; lucrul mecanic al forțelor exterioare este regăsit sub forma variației energiei potențiale $V(\Delta \mathbf{r})$ a sistemului corespunzătoare forțelor interioare.

Cu ajutorul sistemului electro-mecanic descris mai sus se poate modela procesul emisiei radiației de către sistemul cuantic, precum și procesul de interacțiune a acestuia cu câmpul radiațiilor optice. Să analizăm condițiile în care poate fi modelat un atom.

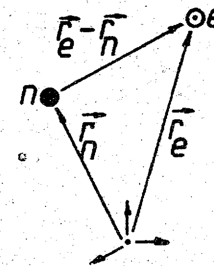


Fig. 3.

Atomul din punct de vedere electric reprezintă un sistem neutru. Dacă este supus acțiunii unui câmp *em*, acesta acționează asupra particulelor individuale încărcate constituente ale sistemului cu o forță descrisă de relația (1.3). Considerăm m_e - masa

electronului poziționat prin vectorul $\mathbf{r}_e$, iar $(-e)$ - sarcina acestuia (fig. 3), respectiv m_n - masa nucleului poziționat prin vectorul $\mathbf{r}_n$, iar $(+e)$ - sarcina acestuia. (Deoarece în fenomenele optice nu sunt implicate particule relativiste, în relația (1.3) poate fi neglijată contribuția câmpului magnetic). Între nucleu și electron se manifestă o forță de interacțiune care depinde de distanța relativă $\mathbf{x}=\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_n$ dintre cele două particule.

Centrul de masă al sistemului considerat este poziționat prin vectorul:

$$\mathbf{R}=\frac{m_e\mathbf{r}_e+m_n\mathbf{r}_n}{m_e+m_n},$$

iar vectorii de poziție ai constituenților sistemului sunt dați de relațiile:

$$\mathbf{r}_e=\mathbf{R}+\frac{m_n}{m_e+m_n}\mathbf{x} \quad \text{și} \quad \mathbf{r}_n=\mathbf{R}-\frac{m_e}{m_e+m_n}\mathbf{x}.$$

Mișcarea electronului, respectiv a nucleului, sub acțiunea câmpului *em* este descrisă de ecuația:

$$m_e\frac{d^2\mathbf{r}_e}{dt^2}=m_e\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}+\frac{m_em_n}{m_e+m_n}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-e\,\mathbf{e}(\mathbf{r}_e,t)+\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x})$$

$$m_n\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}-\frac{m_em_n}{m_e+m_n}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=e\,\mathbf{e}(\mathbf{r}_n,t)+\mathbf{F}_{ne}(\mathbf{x}),$$

unde $\mathbf{F}_{ne}(\mathbf{x})=-\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x})$ reprezintă forța de interacțiune nucleu-electron, iar $\mathbf{e}$ - intensitatea câmpului electric în locul unde este dispusă particula. Dacă cele două relații se adună se obține:

$$\text{a)} \quad (m_e+m_n)\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}=e[\mathbf{e}(\mathbf{r}_n,t)-\mathbf{e}(\mathbf{r}_n,t)],$$

iar dacă se scad rezultă:

$$\text{b)} \quad \frac{m_em_n}{m_e+m_n}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\frac{e}{2}[\mathbf{e}(\mathbf{r}_n,t)+\mathbf{e}(\mathbf{r}_e,t)]+\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x})+\frac{m_n-m_e}{2}\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}.$$

Ecuația a) descrie mișcarea centrului de masă al sistemului atomic sub acțiunea câmpului *em*, iar ecuația b) descrie variația în timp a coordonatei relative $\mathbf{x}$ a sistemului.

Considerând faptul că dimensiunile sistemului atomic sunt cuprinse în domeniul $(1\div10)$Å, iar lungimea de undă a radiației optice este de ordinul miilor de Å (cazul aproximației de dipol electric), pe domeniul ocupat de sistemul atomic se poate exprima intensitatea câmpului electric printr-o dezvoltare în serie Taylor, față de centrul de masă al sistemului, funcție de parametrul $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_n,t)=\mathbf{e}\left(\mathbf{R}-\frac{m_e}{m_em_n}\mathbf{x},t\right)=\mathbf{e}(\mathbf{R},t)-\frac{m_e}{m_em_n}\mathbf{x}\,\nabla\cdot\mathbf{e}(\mathbf{R},t)+\cdots$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}_e,t)=\mathbf{e}\left(\mathbf{R}+\frac{m_n}{m_em_n}\mathbf{x},t\right)=\mathbf{e}(\mathbf{R},t)+\frac{m_n}{m_em_n}\mathbf{x}\,\nabla\cdot\mathbf{e}(\mathbf{R},t)+\cdots$$

Aceste expresii, introduse în ecuațiile a) și b), conduc la:

$$(m_e+m_n)\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\cong-e\mathbf{x}\nabla_{\mathbf{R}}\mathbf{e}(\mathbf{R},t),$$

$$\frac{m_em_n}{m_e+m_n}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\cong-e\,\mathbf{e}(\mathbf{R},t)+\frac{m_n-m_e}{m_e+m_n}e\mathbf{x}\,\nabla\cdot\mathbf{e}(\mathbf{R},t)+\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}).$$

Conform definiției, momentul de dipol al sistemului este: $\mathbf{p}=e\mathbf{x}$, iar mărimea $V(\mathbf{x},\mathbf{R},t)=-\mathbf{p}\mathbf{e}(\mathbf{R},t)$ reprezintă energia potențială determinată de interacțiunea dipolului electric dispus în punctul $\mathbf{R}$ cu câmpul *em*. De aici rezultă:

$$e\,\mathbf{e}(\mathbf{R},t)=-\nabla_{\mathbf{x}}[-e\mathbf{x}\mathbf{e}(\mathbf{R},t)]=-\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x},\mathbf{R},t).$$

In aceste condiții, relațiile (a') și (b') devin:

$$\text{(a")} \quad (m_e+m_n)\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\cong-\mathbf{p}\nabla\cdot\mathbf{e}(\mathbf{R},t)=-\nabla_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x},\mathbf{R},t),$$

(b")

$$\frac{m_em_n}{m_e+m_n}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\cong-\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x},\mathbf{R},t)+\frac{m_n-m_e}{m_e+m_n}\nabla_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x},\mathbf{R},t)+\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}).$$

În multe cazuri de interes practic se poate presupune că centrul de masă al sistemului nu este afectat de către câmpul electric, ci numai coordonata relativă $\mathbf{x}$. Din punct de vedere cuantic, unei variații a coordonatei relative îi corespund tranziții ale sistemului atomic între nivelurile de energie, tranziții ce pot fi implicate în efectul de emisie stimulată. Mișcarea sistemului va fi descrisă de ecuația (b") de forma:

$$m_e\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=e\,\mathbf{e}(\mathbf{R},t)+\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}).$$

Există fenomene în care influența câmpului asupra centrului de masă este esențială: micșorarea temperaturii ansamblului de sisteme atomice determinată de interacțiunea acestora cu câmpuri intense sau așa numitul efect de "capcană laser" (laser trapping).

Pentru a rezolva ecuațiile (a") și (b") este necesar să se cunoască expresia forței de interacțiune electron-nucleu. La sfârșitul secolului al 19-lea, H.A. Lorentz a propus *modelul dipolului electric liniar oscilant amortizat* sau *modelul Lorentz*. Deoarece când a elaborat modelul nu se cunoștea structura atomului, Lorentz a presupus că dacă nu acționează forțe exterioare, electronul ocupă în atom o poziție de echilibru, iar sub

acţiunea componentei electrice a câmpului *em* el efectuează o deplasare $\mathbf{x}$ din poziţia de echilibru. Modelul este valabil şi pentru structura actuală a atomului. Pentru un atom cu Z electroni se urmăreşte acţiunea câmpului *em* numai asupra unui singur electron (electronul optic). Sarcina electrică a celor $(Z-1)$ electroni este compensată de sarcina celor $(Z-1)$ protoni ai nucleului. Se obţine un sistem aflat în echilibru format din nucleu cu masă mare şi sarcină $(+e)$ şi un electron cu sarcina $(-e)$, a cărui masă este foarte mică faţă de nucleu, dispus la distanţa $\mathbf{x}$ faţă de acesta. Ca rezultat a deplasării electronului sub acţiunea câmpului electric, în modelul considerat se vor manifesta forţe de tip elastic care caută să-l readucă în poziţia de echilibru. Ecuaţia ce descrie variaţia în timp a deplasării $\mathbf{x}$ va fi de forma ecuaţiei (b") şi anume:

$$m_e \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cong e\,e(\mathbf{R},t) - k\,\mathbf{x}$$

unde k reprezintă constanta elastică asociată forţei de legătură.

Pentru a reprezenta sistemul într-un mod cât mai apropiat de realitate, funcţia ce descrie energia potenţială efectivă a sistemului poate fi scrisă ca o serie de puteri în $(\Delta\mathbf{r})$:

(4.1) $$V(\Delta\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 (\Delta\mathbf{r})^2 + A(\Delta\mathbf{r})^3 + B(\Delta\mathbf{r})^4 + \cdots$$

Pentru a identifica coeficienţii, se dezvoltă în serie Taylor funcţia $V(\Delta\mathbf{r})$, dacă aceasta este continuă şi derivabilă:

(4.2) $$V(\Delta\mathbf{r}) = V(\Delta\mathbf{r})\big|_0 + \frac{\Delta\mathbf{r}}{1!}\frac{dV(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})}\bigg|_0 + \frac{(\Delta\mathbf{r})^2}{2!}\frac{d^2V(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})^2}\bigg|_0 + \frac{(\Delta\mathbf{r})^3}{3!}\frac{d^3V(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})^3}\bigg|_0 + \cdots$$

în jurul poziţiei de echilibru ($\Delta\mathbf{r} = 0$). În relaţia (4.2), $V(0)$ reprezintă o constantă aditivă la energia totală; deoarece nu generează nici o forţă ($F = -dV(\Delta\mathbf{r})/d(\Delta\mathbf{r})$), aceasta poate fi neglijată. De asemenea este necesar să se considere: $dV(\Delta\mathbf{r})/d(\Delta\mathbf{r}) = 0$, deoarece în punctul de echilibru stabil nu acţionează nici o forţă. Faţă de punctul de echilibru stabil energia potenţială este pozitivă (fig. 4), deci trebuie îndeplinită şi condiţia: $d^2V(\Delta\mathbf{r})/d(\Delta\mathbf{r})^2 > 0$.

Dezvoltarea în serie Taylor care satisface condiţiile sistemului fizic considerat, este de forma:

(4.3) $$V(\Delta\mathbf{r}) = + \frac{(\Delta\mathbf{r})^2}{2}\frac{d^2V(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})^2}\bigg|_0 + \frac{(\Delta\mathbf{r})^3}{6}\frac{d^3V(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})^3}\bigg|_0 + \cdots$$

Din identificarea relaţiei (4.1) cu (4.3), rezultă că: $m\,\omega_0^2 = \frac{d^2V(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})^2}\Big|_0$ (frecvenţa proprie de oscilaţie (ω_0) a sistemului este determinată de curbura funcţiei de potenţial efectiv), respectiv: $A = \frac{1}{6}\frac{d^3V(\Delta\mathbf{r})}{d(\Delta\mathbf{r})^3}\Big|_0$.

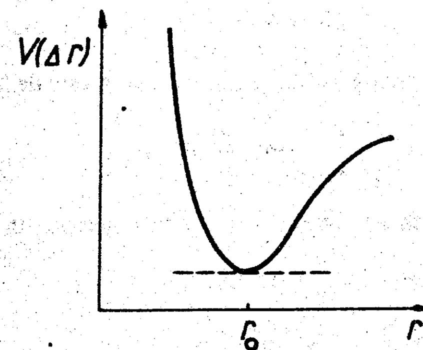


Fig. 4.

Forţa care apare în sistem ca rezultat al deformării este de forma:

(4.4) $$F = -\frac{dV(\Delta r)}{d(\Delta r)} = -m\,\omega_0^2(\Delta r) - 3A(\Delta r)^2 - 4B(\Delta r)^3 - \cdots$$

Termenii neliniari din relaţia (4.4), conduc la ecuaţii diferenţiale neliniare care descriu mişcarea sistemului fizic. Aceste ecuaţii, în general sunt dificil de rezolvat şi trebuie tratate numeric. Termenii neliniari din (4.4) sunt responsabili de *efectele optice neliniare*.

Dacă: $A = B = \cdots = 0$, se obţine:

$$F = -m\,\omega_0^2(\Delta r) = -k(\Delta r),$$

adică forţa care apare în sistem este proporţională cu mărimea deformării şi acţionează în sens invers sensului de creştere a acesteia, deci este o forţă de tip *elastic*. Acesta este cazul *efectelor optice liniare*.

Deformarea sistemului fizic considerat se poate produce prin două procese: perturbare momentană determinată de cauze externe sau prin interacţiune cu un câmp *em* extern.

4.1 Perturbare momentană.

In timpul perturbării sistemului fizic (dipolul electric), într-un interval de timp foarte scurt, se produce o deformare a acestuia care determină apariţia unui moment de dipol electric: $p_0 = q\Delta r_0$, unde: Δr_0 reprezintă deformarea iniţială a sistemului. După perturbare, în sistem se manifestă forţe elastice care au tendinţa de a-l readuce la starea de echilibru şi forţe care se opun acestei tendinţe (de ex. forţe de frecare), care, pentru viteze mici ale deplasării, sunt proporţionale cu viteza (în continuare va fi considerată numai deplasarea de-a lungul axei x):

(4.5)
$$F_{fr} = -\eta \frac{dx}{dt}.$$

Ecuaţia ce descrie variaţia în timp a deformaţiei x este de forma:

(4.6)
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\eta\frac{dx}{dt} - kx.$$

Inmulţind cu q/m (unde m reprezintă masa sarcinii electrice în mişcare) şi notând $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, respectiv: $\gamma_0 = \eta/m$, se obţine ecuaţia:

(4.7)
$$\frac{d^2 p(t')}{dt'^2} + \gamma_0 \frac{d\,p(t')}{dt'} + \omega_0^2\, p(t') = 0,$$

care descrie variaţia în timp a momentului de dipol electric indus în sistem ca rezultat al perturbării momentane.

Deoarece în timpul mişcării apar forţe disipative, variaţia momentului de dipol electric va fi periodică, amortizată, deci momentul de dipol poate fi exprimat printr-o integrală Fourier:

(4.8a)
$$p(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\nu) e^{i2\pi\nu t'} d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) e^{i\omega t'} d\omega, \text{ unde:}$$

(4.8b)
$$p(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t') e^{-i2\pi\nu t'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t') e^{i\omega t'} dt',$$

reprezintă amplitudinea componentelor armonice ale mişcării amortizate a dipolului. In aceste condiţii, ecuaţia de mişcare (4.7) se scrie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\omega^2 + i\omega\gamma_0 + \omega_0^2\right] p(\omega) e^{i\omega t'} d\omega = 0.$$

Această ecuaţie trebuie să fie satisfăcută pentru orice valoare ω, respectiv $p(\omega)$, deci este necesară egalitatea:

$$\omega^2 - i\omega\gamma_0 - \omega_0^2 = 0.$$

De unde: $\omega = i\frac{\gamma_0}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} = i\frac{\gamma_0}{2} \pm \omega_1$, unde ω_1 reprezintă pulsaţia oscilaţiei dipolului amortizat, diferită de pulsaţia proprie de oscilaţie a dipolului neamortizat. Pentru cazul oscilaţiilor din domeniul optic ($\gamma_0 \ll \omega_0$) diferenţa este foarte mică şi se poate considera:

$$\omega_1 \cong \omega_0\left(1 - \frac{\gamma_0^2}{8\omega_0^2}\right).$$

Expresia momentului de dipol electric devine:

(4.9 a)
$$p(t') = e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'} e^{i\omega_0 t'} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) d\omega = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'} e^{i\omega_0 t'},$$

iar amplitudinile spectrale ale acestuia sunt date de funcţia complexă:

(4.9 b)
$$p(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'} e^{i(\omega-\omega_0)t'} dt' = \frac{p_0}{\frac{\gamma_0}{2} - i(\omega - \omega_0)}.$$

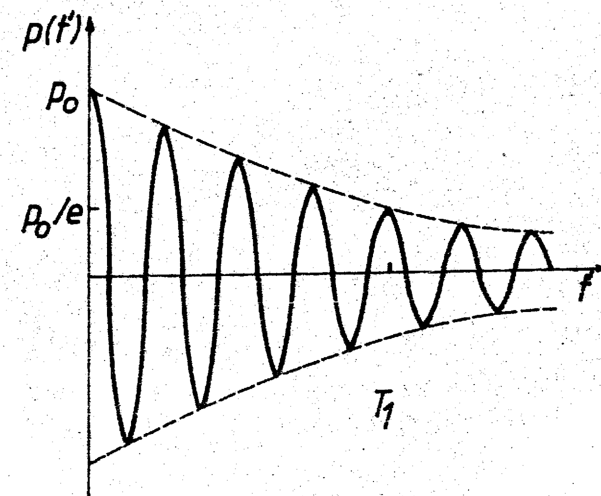


Fig. 5

Partea reală a funcţiei complexe (4.9 a) este prezentată în fig. 5. Expresia (4.9 a) arată că momentul de dipol electric al sistemului considerat variază în timp în mod oscilator amortizat cu frecvenţa ω_0, factorul de amortizare fiind reprezentat de mărimea γ_0. Durata oscilaţiei este caracterizată prin intervalul de timp T_1, măsurat din momentul perturbării, când sistemul îşi măreşte energia internă, până în momentul când amplitudinea oscilaţiei scade de e ori faţă de cea iniţială:

$$\frac{p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}T_1}}{p_0} = \frac{1}{e}, \quad \text{deci:} \quad T_1 = \frac{2}{\gamma_0}$$

Această mărime este cunoscută sub denumirea de *timp de relaxare* (*stingere*) al oscilaţiilor sistemului considerat.

De asemenea relaţia (4.9a) evidenţiază faptul că momentul de dipol indus în sistem poate fi considerat ca fiind rezultatul prezenţei simultane a unui număr infinit de dipoli armonici a căror frecvenţă de oscilaţie este distribuită în mod continuu în domeniul $(-\infty,+\infty)$, amplitudinea fiecărui dipol armonic fiind dată de relaţia (4.9b), iar între fazele oscilaţiilor dipolilor armonici nu există o legătură de fază (faza iniţială poate lua cu probabilitate egală orice valoare în domeniul $(-\pi \div +\pi)$)

Dacă pentru ecuaţia (4.7) se consideră condiţiile iniţiale $p(0) = p_0$ şi $\dot{p}(0) = 0$, atunci soluţia acesteia are forma:

$$p(t') = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'}\left(\cos\omega_1 t' + \frac{\gamma_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t'\right).$$

In cazul domeniului optic $(\gamma_0 \langle\langle \omega_0)$, această soluţie are forma:

$$p(t') = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'}\cos\omega_0 t'.$$

Considerând elongaţia momentului de dipol la momentul $t' = t - \frac{R}{c}$:

$$p(t') = p_0 \exp\left[-\frac{\gamma_0}{2}\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\exp\left\{i\left[\omega_0\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\right\},$$

folosind relaţia (3.6a), se poate calcula elongaţia câmpului electric la momentul t, în punctul dispus la distanţa R faţă de sistem:

$$e(\mathbf{R},t) =$$

$$= -\frac{\left(ik_0 - \frac{\gamma_0}{2c}\right)^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\exp\left[-\frac{\gamma_0}{2}\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\exp\left\{i\left[\omega_0\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]\right\}\mathbf{n}_\theta$$

Deoarece: $k_0 \rangle\rangle \gamma_0/c$, această relaţie se poate scrie sub forma:

$$e(\mathbf{R},t) \propto \frac{k_0^2 p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\exp\left(-\frac{\gamma_0}{2}t\right)\exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})]\mathbf{n}_\theta =$$

(4.10) $$= \frac{E_0'}{R}\exp\left(-\frac{\gamma_0}{2}t\right)\exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})]\mathbf{n}_\theta = ,$$

$$= \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{\gamma_0}{2}t\right)\exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})]\mathbf{n}_\theta$$

unde $\mathbf{E}_0$ reprezintă amplitudinea iniţială a intensităţii câmpului electric la distanţa R faţă de sursă (mărimea E se exprimă în V/m, în timp ce $\mathbf{E}_0'$ se exprimă în V).

Din cele prezentate rezultă că dacă nu există alte mecanisme de disipare a energiei, atunci creşterea iniţială a energiei interne a sistemului considerat este regăsită în energia *em* radiată de către acesta. Acest proces poate modela din punct de vedere clasic unele caracteristici ale *emisiei spontane* de radiaţie *em* de către un sistem atomic sau de un ansamblu format din aceste sisteme.

4.2 Momentul de dipol electric al unui sistem aflat în câmp *em*.

Mişcarea particulelor încărcate cu sarcini electrice ale sistemului fizic considerat poate fi influenţată prin intermediul forţei descrise de relaţia (1.3) şi de acţiunea unui câmp *em* extern. Forţa de interacţiune magnetică poate fi neglijată faţă de cea electrică.

In continuare se va folosi noţiunea de *semnal analitic*, care utilizează exprimarea câmpului electric armonic sub forma:

$$e(\omega,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{E}(\omega)e^{i\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left[\tilde{E}(\omega)e^{i\omega t} + \tilde{E}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right],$$

unde: $\tilde{E}(\omega) = E(\omega)e^{i\varphi}$, $E(\omega)$ reprezintă amplitudinea undei armonice de frecvenţă ω, iar φ - faza undei. Mărimea $\tilde{E}(\omega)$ reprezintă *fazorul undei* şi conţine informaţii atât despre amplitudinea undei cât şi despre faza acesteia. Dacă se foloseşte definiţia fazorului, expresia semnalului analitic devine:

$$e(\omega,t)=\frac{E(\omega)}{2}\left[e^{i(\omega t+\varphi)}+e^{-i(\omega t+\varphi)}\right]=$$

$$=\frac{E(\omega)}{2}\left[\cos(\omega t+\varphi)+i\sin(\omega t+\varphi)+\cos(\omega t+\varphi)-i\sin(\omega t+\varphi)\right]=,$$

$$=E(\omega)\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left[\widetilde{E}(\omega)e^{i\omega t}\right]$$

Dacă asupra dipolului electric definit mai sus acţionează un câmp *em* armonic caracterizat prin frecvenţa ω, acesta induce în sistem un moment de dipol a cărui variaţie în timp este descrisă de ecuaţia diferenţială:

(4.11) $$\frac{d^2 p(t)}{dt^2}+\gamma_0\frac{dp(t)}{dt}+\omega_0^2 p(t)=\frac{q^2}{m_q}e_p(\omega,t),$$

unde $e_p(\omega,t)$ reprezintă proiecţia vectorului intensitate câmp electric $e(t)$ pe direcţia vectorului $\mathbf{p}$ (în continuare se vor considera numai proiecţiile pe direcţia x).

Momentul de dipol indus în sistem ca rezultat al acţiunii câmpului extern, va fi reprezentat tot de o mărime armonică, caracterizată prin aceeaşi frecvenţă, de forma:

$$p(\omega,t)=\mathrm{Re}\left[\widetilde{p}(\omega)e^{i\omega t}\right].$$

Introducând această mărime în ecuaţia (4.11) se obţine expresia fazorului momentului de dipol:

$$\left(-\omega^2+i\gamma_0\omega+\omega_0^2\right)\widetilde{p}(\omega)=\frac{q^2}{m_q}\widetilde{E}(\omega),\ \text{de unde:}$$

(4.12) $$\widetilde{p}(\omega)=\frac{\frac{q^2}{m_q}\widetilde{E}(\omega)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\gamma_0\omega}=\widetilde{\alpha}(\omega)\widetilde{E}(\omega),\ \text{unde:}$$

(4.13) $$\widetilde{\alpha}(\omega)=\frac{\frac{q^2}{m_q}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\gamma_0\omega},$$

reprezintă *polarizabilitatea* sistemului fizic considerat. Această mărime exprimă intensitatea interacţiunei dintre câmpul *em* aplicat şi dipolul electric definit prin caracteristicele lui (ω_0,γ_0) (sau răspunsul dipolului electric la acţiunea câmpului *em* aplicat).

Din punct de vedere al electrodinamicii clasice, polarizabilitatea sistemului este funcţie de frecvenţa câmpului excitator. Prezintă interes răspunsurile de intensitate relativ mare ale sistemului la acţiuni externe, adică cele dispuse în apropierea frecvenţei

de rezonanţă. Deoarece în domeniul optic lăţimea benzii de interacţiune este relativ mică, sunt importante semnalele excitatoare ale căror frecvenţă îndeplinesc condiţia: $\omega\cong\omega_0$. In aceste condiţii se poate considera aproximaţia:

$$\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)\cong 2\omega_0(\omega_0-\omega),$$

iar relaţia (4.13) devine:

$$\widetilde{\alpha}(\omega)=\alpha'(\omega)+i\alpha''(\omega)=\frac{q^2}{m_q}\frac{1}{2\omega_0(\omega_0-\omega)+i\gamma_0\omega}=$$

$$=-\frac{q^2}{m_q\gamma_0\omega_0}\frac{\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}-i\frac{q^2}{m_q\gamma_0\omega_0}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}$$

deci:

(4.14a) $$\alpha'(\omega)=-\frac{q^2}{m_q\gamma_0\omega_0}\frac{\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2},$$

(4.14b) $$\alpha''(\omega)=-i\frac{q^2}{m_q\gamma_0\omega_0}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}.$$

Existenţa părţii imaginare a mărimii $\widetilde{\alpha}(\omega)$ implică faptul că oscilaţia momentului de dipol $p(t)$ nu este în fază cu cea a câmpului perturbator. Defazarea acestor mărimi este: $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\gamma_0/2}{\omega-\omega_0}$. Această defazare, a cărei valoare este determinată de parametrii dipolului şi de frecvenţa câmpului, se menţine pe toată durata timpului de interacţiune dintre dipol şi câmpul perturbator.

Ca rezultat al acţiunii câmpului exterior, o parte din energia acestuia este transferată în energia internă a sistemului. Acest proces modelează din punctul de vedere al electrodinamicii clasice *"procesul de absorbţie de energie em"* de către sistemul considerat. Puterea medie transferată sistemului de către câmpul *em* într-un interval de timp egal cu o perioadă este dată de relaţia:

(4.15)

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}(t)F(t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left[i\omega\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t} - i\omega\tilde{X}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right]\frac{q}{2}\left[\tilde{E}(\omega)e^{i\omega t} + \tilde{E}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right]dt =$$

$$= \frac{iq\omega}{4}\int_0^T\left[\tilde{X}(\omega)\tilde{E}^*(\omega) - \tilde{X}^*(\omega)\tilde{E}(\omega)\right]dt = \frac{i\omega}{4}\left[p(\omega)\tilde{E}(\omega) - p^*(\omega)\tilde{E}^*(\omega)\right] =$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left[\tilde{\alpha}(\omega)\left|\tilde{E}(\omega)\right|^2 - \alpha^*(\omega)\left|\tilde{E}(\omega)\right|^2\right] =$$

$$= \frac{i\omega}{4}\left|\tilde{E}(\omega)\right|^2\left[\alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) - \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)\right] =$$

$$= -\frac{\omega}{2}\alpha''(\omega)\left|\tilde{E}(\omega)\right|^2 = \frac{\pi q^2}{4m_q}\frac{2}{\pi\gamma_0}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}\left|\tilde{E}(\omega)\right|^2 =$$

$$= \frac{\pi q^2}{4m_q}\left|\tilde{E}(\omega)\right|^2 g_L(\omega_0,\omega)$$

unde funcţia:

(4.16) $$g_L(\omega_0,\omega) = \frac{2/\pi\gamma_0}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} \quad \text{[sec]}$$

este normată, adică îndeplineşte condiţia:

(4.17) $$\int_0^\infty g_L(\omega_0,\omega)d\omega = 1.$$

Din relaţia (4.14) rezultă că partea imaginară a polarizabilităţii $\alpha''(\omega)$ descrie procesul de absorbţie a energiei câmpului *em* de către dipol, iar funcţia $g_L(\omega,\omega_0)$ care descrie mărimea cuplajului dintre sistem şi câmpul *em* la diferite frecvenţe, reprezintă *conturul de absorbţie* al dipolului electric. Conturul este caracterizat prin *lăţime spectrală*, care reprezintă diferenţa dintre frecvenţele cărora le corespund valori ale conturului egale cu jumătate din valoarea sa maximă:

$$g_L(\omega_1) = g_L(\omega_2) = \frac{g_L(\omega_0)}{2},$$

$$\frac{2/\pi\gamma_0}{1+\left(\dfrac{\omega_1-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} = \frac{2/\pi\gamma_0}{1+\left(\dfrac{\omega_2-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} = \frac{2/\pi\gamma_0}{2},$$

(4.18) $$\omega_0 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\gamma_0}{2} \quad \text{de unde,}$$

$$\Delta\omega_0 = 2\frac{\gamma_0}{2} = \gamma_0.$$

Conturul prezintă o dependenţă puternică de diferenţa dintre frecvenţa câmpului *em* armonic excitator şi cea a oscilaţiilor libere ale sistemului, precum şi de valoarea constantei de amortizare γ_0. Cu cât constanta de amortizare este mai mică, cu atât conturul de absorbţie este mai ascuţit. Conform electrodinamicii clasice sistemul considerat este capabil să interacţioneze cu câmpul *em* numai într-un singur domeniu de frecvenţe. Utilizând notaţiile introduse mai sus, expresiile (4.14 a,b) pot fi scrise sub forma:

(4.14)

(a') $$\alpha'(\omega) = \alpha''(\omega_0)\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_0/2}g_L(\omega)$$

(b') $$\alpha''(\omega) = -\frac{\pi q^2}{2m_q\omega_0}g_L(\omega) = \alpha''(\omega_0)g_L(\omega),$$

unde: $-\dfrac{\pi q^2}{2m_q\omega_0} = \alpha''(\omega_0)$, reprezintă valoarea maximă a mărimii $\alpha''(\omega)$.

In fig. 6 sunt prezentate grafic mărimile $g_L(\Delta x)$, respectiv $\Delta x\, g_L(\Delta x)$, funcţie de variabila $\Delta x = \dfrac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_0}$. Se observă că mărimea $\Delta\omega_0$ defineşte domeniul spectral în care interacţiunea dintre câmp şi dipol, determinată de partea imaginară a polarizabilităţii, este cea mai intensă. Din acest punct de vedere domeniul spectral pe care dipolul îşi manifestă prezenţa prin partea reală a polarizabilităţii este egal cu câteva lăţimi spectrale ale conturului de absorbţie. Mărimea $\alpha'(\omega)$ se anulează la rezonanţă $\alpha'(\omega_0) = 0$ şi prezintă semne opuse pentru frecvenţe simetrice faţă de rezonanţă. La început variază cu frecvenţa aproximativ liniar, atingând valori extreme la

$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2}$, ca ulterior valoarea mărimii să scadă relativ lent. După cum se va stabili în cap. II, partea reală a polarizabilității dipolului electric - $\alpha'(\omega)$ - este responsabilă de variația fazei câmpului *em*, determinată de interacțiunea acestuia cu dipolul.

Din cele prezentate rezultă că un câmp *em* armonic (ω) induce în sistemul considerat un moment de dipol, caracterizat prin aceeași frecvență și o amplitudine complexă $\tilde{p}(\omega)$, a cărei mărime este determinată de valoarea polarizabilității sistemului corespunzătoare frecvenței considerate. Momentului de dipol indus $\tilde{p}(\omega)$, conform relației (3.6a), îi corespunde un câmp *em* armonic secundar de aceeași frecvență emis de către acesta, a cărui componentă electrică, la distanța R în vid, este dată de relația:

(4.19) $$\mathbf{e}_{sec}(\mathbf{R},\omega,t) = -\frac{i^2 k_0^2 \omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{R}\mathbf{n}_\theta\tilde{\alpha}(\omega)\tilde{E}(\omega)\exp[i(\omega t - \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})].$$

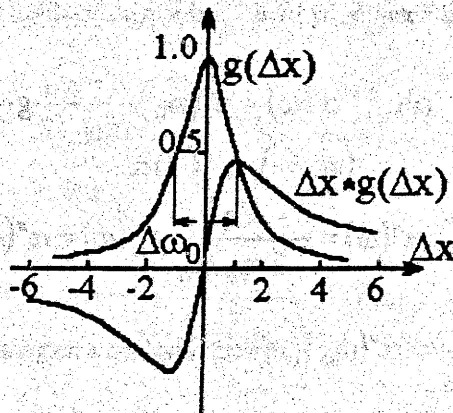


Fig. 6.

Conform legii conservării energiei, energia absorbită de către dipol de la câmpul *em* armonic excitator, este regăsită în câmpul *em* armonic secundar emis de către dipol, dacă acesta este considerat liber (lipsesc mecanismele de transfer a energiei interne a dipolului pe alte canale).

Dacă sistemul considerat este excitat de un câmp *em* constituit dintr-o succesiune continuă de câmpuri armonice, cu amplitudini egale, atunci în sistem sunt induse momente de dipol cu amplitudini diferite, conform conturului funcției $\alpha''(\omega)$,

cărora le vor corespunde câmpuri secundare ale căror amplitudini sunt determinate de valorile polarizabilității $\alpha''(\omega)$. Câmpul total va fi dat de relația:

(4.20) $$\mathbf{e}_{sec}(\mathbf{R},t) = \frac{\mathbf{n}_\theta \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\alpha}(\omega)\tilde{E}(\omega)\exp[i(\omega t - \mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R})]d\omega,$$

unde integrala este diferită de zero pe domeniul de definiție a polarizabilității $\tilde{\alpha}(\omega)$ a sistemului.

5. Radiația de dipol electric.

Pe baza relației (6.4) se poate calcula puterea instantanee a radiației emise de către un ansamblu de sarcini caracterizat prin momentul de dipol $\mathbf{p}(t')$, într-un punct dispus la distanța R de acesta. Puterea instantanee este dată de valoarea instantanee a vectorului Poynting:

(5.1) $$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{c\mu_0}e^2(t)\mathbf{S}_0 = \frac{\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\left[\frac{d^2\,\mathbf{p}(t')}{dt'^2}\right]^2\mathbf{S}_0.$$

Din relația (5.1), ca și din (3.6), reiese că ansamblul de sarcini emite radiații optice în toate direcțiile, însă mărimea puterii instantanee a câmpului *em* depinde de unghiul format de direcția dipolului electric și direcția punctului în care se calculează. Valoarea maximă a puterii emise se obține pe direcția perpendiculară la direcția de oscilație a momentului de dipol electric ($\theta = \frac{\pi}{2}$) și este egală cu zero pe direcția dispusă de-a lungul acesteia. Reprezentarea grafică a dependenței puterii instantanee de unghiul θ într-un plan caracterizat prin $\varphi = \mathrm{ct}$, cunoscută sub denumirea de *indicatrice de radiație* de dipol electric, este prezentată în fig. 7.

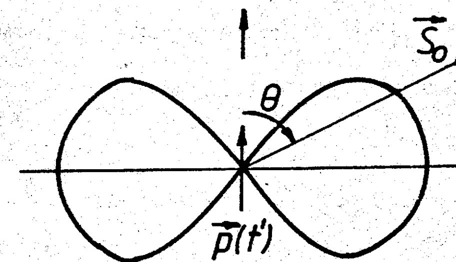


Fig. 7

Puterea instantanee totală radiată de către dipolul electric se obține prin integrarea puterii instantanee pe o sferă de rază R, care închide ansamblul de sarcini electrice:

(5.2)
$$P_{inst.tot.}=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\left|\ddot{p}(t')\right|^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}R^2\sin^3\theta d\theta=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\ddot{p}(t')\right|^2.$$

In cazul modelului Lorentz, momentul de dipol variază conform legii mișcării armonice, frecvența mișcării fiind egală cu ω_0, deci elongația momentului de dipol este:

$$p(t')=p_0\cos\omega_0 t'=er_0\cos\omega_0 t',\text{ de unde:}$$

$$\ddot{p}(t')=-\omega_0^2 p_0\cos\omega_0 t'=-\omega_0^2 p(t').$$

In acest caz puterea instantanee totală devine:

(5.3)
$$P_{inst.tot.}=\frac{\omega_0^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left|p(t')\right|^2=\frac{\omega_0^4 e^2 r_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cos^2\omega_0 t'=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{v}(t')\right|^2.$$

Puterea medie totală emisă de către dipolul Lorentz se obține prin medierea puterii instantanee pe o perioadă a mișcării:

(5.4)
$$\langle P_{inst.tot.}\rangle=\frac{\omega_0^4 e^2 r_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\langle\cos^2\omega_0 t'\rangle=\frac{4\pi^3\nu_0^4 e^2}{3\varepsilon_0 c^3}\left|r_0\right|^2.$$

Chiar dacă dipolul este liber, puterea radiată face ca el să-și micșoreze energia internă, adică să execute o mișcare oscilatorie amortizată. Amortizarea este echivalentă cu lucrul mecanic efectuat asupra dipolului de o *forță de "frecare"*. Expresia acestei forțe, cunoscută sub denumirea de *"forța de frecare radiativă"*, se poate calcula utilizând considerente fenomenologice: lucrul mecanic efectuat de această forță, într-un interval de timp $\Delta t\rangle\rangle\frac{1}{\omega}$, trebuie să fie egal cu energia totală radiată de către dipol în același interval de timp, considerată cu semnul minus.

$$\int_0^{\Delta t}F_{rad.}v\,dt=-\int_0^{\Delta t}\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left|\dot{v}\right|^2 dt=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}(\dot{v}v)\Big|_0^{\Delta t}-\int_0^{\Delta t}\ddot{v}v\,dt,\text{ sau:}$$

(deoarece v este o funcție periodică, primul termen din această expresie este egal cu zero)

$$\int_0^{\Delta t}\left[F_{rad.}-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{v}\right]v\,dt=0,\text{ de unde:}$$

(5.5)
$$F_{rad.}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{v}.$$

Deoarece $F_{rad.}\langle\langle F_{cvel}$ (amortizarea dipolului este mică), pe intervale de timp relativ mari se poate considera, în primă aproximație, elongația acestuia de forma:

$$r(t')=r_0\exp(i\omega_0 t'),\text{ deci: }\dddot{r}(t')=\ddot{v}(t')=-\omega_0^2\dot{r}(t')=-\omega_0^2 v(t'),$$

iar expresia "forței de frecare luminoasă" capătă forma (4.1):

$$F_{rad.}=-\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}v(t')=-\gamma_0 m_e v(t'),\text{ unde:}$$

(5.6)
$$\gamma_0=\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_e},$$

reprezintă expresia *coeficientului de amortizare radiativă*. Apare expresia unei forțe rezistive, care în condițiile impuse, este proporțională cu viteza de deplasare a sarcinii electrice.

Dacă se consideră un dipol electric de tipul modelului Lorentz a cărui radiație este caracterizată prin $\lambda_0=500\,nm$ ($\nu_0=6.10^{14}\,Hz$ -domeniul vizibil al spectrului), coeficientul de amortizare radiativă al acestuia este $0{,}88\cdot10^8\,s^{-1}$, timpul de relaxare $T_1=2{,}27.10^{-8}\,s$, iar lățimea spectrală radiativă a semnalului emis $\Delta\nu_0=0{,}14.10^8\,Hz$. In cazul radiației cu $\lambda_0=1{,}25\,cm$ ($\nu_0=24{,}87.10^9\,Hz$ - domeniul IR îndepărtat al spectrului - molecula de NH_3) se obține $\gamma_0=0{,}152\,s^{-1}$, $T_1=17{,}36\,s$ și $\Delta\nu_0=2{,}4.10^{-2}\,Hz$. Deoarece lățimea spectrală radiativă a radiației emise depinde de frecvență, valoarea ei în domeniul microundelor este mult mai mică față de cea din domeniul optic.

Domeniul de aplicație a condiției $F_{cvel}\rangle\rangle F_{rad}$ este foarte larg. Din această condiție rezultă:

$$m_e\omega_0^2 r(t')\rangle\rangle\frac{e^2\omega_0^3}{6\pi\varepsilon_0 c^3}r(t')=\frac{e^2\omega_0^2}{3\varepsilon_0 c^2\lambda_0}r(t'),$$

de unde: $$\lambda_0 \rangle\rangle \frac{e^2}{3\varepsilon_0 c^2 m_e} = r_e,$$

unde λ_0 -lungimea de undă a radiației emise, iar $r_e = 1{,}4.10^{-14}$ m reprezintă raza clasică a electronului. Această condiție este îndeplinită pe tot domeniul de frecvențe al radiațiilor optice (chiar și pentru frecvențele din domeniul-γ).

6. Mărimi caracteristice ale radiației *em* optice.

In domeniul de frecvențe a radiației optice limitat aprox. de valorile: $\nu_1 = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ Hz $(\lambda_1 = 20\mu\text{m})$ și $\nu_2 = 1{,}6 \cdot 10^{15}$ Hz $(\lambda_2 = 180\mu\text{m})$, nu există receptori de radiație și dispozitive de înregistrare care să poată urmări valorile instantanee ale câmpului electric. Dispozitivele electronice actuale pot înregistra numai variații ale intensității câmpului electric care au loc într-un interval de timp de ordinul a 10^{-11} sec. In acest interval de timp dispozitivul înregistrează numai valoarea medie a intensității câmpului electric al radiației optice, adică valoarea medie a aprox. 10^4 oscilații.

Dacă se consideră că, din anumite cauze, procesul de emisie a câmpului *em* de către dipol este fragmentat în intervale de timp $\Delta t = 2t_1 \langle\langle T_1$, atunci, pe aceste intervale, amplitudinea intensității câmpului electric poate fi considerată constantă, iar elongația este descrisă de relația:

(6.1) $$e(\mathbf{R}, t) = E(t)\exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}]\exp[-i(\omega_0 t + \varphi_0)],$$ unde:

$$E(t) = \text{ct pentru} : -t_1 \le t \le t_1, \text{respectiv} :$$

$$E(t) = 0 \text{ pentru} : t \langle -t_1 \text{ și } t \rangle t_1$$

Pe acest interval de timp, valoarea medie a intensității câmpului electric este:

$$\langle e(\mathbf{R}, t)\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{-t_1}^{+t_1} E(t)\exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}]\exp[-i(\omega_0 t + \varphi_0)]dt = 0$$

(relația este valabilă numai dacă $\Delta t \rangle\rangle T$, condiție ce este îndeplinită în domeniul radiațiilor optice). Deoarece valoarea medie este egală cu zero, receptorii nu pot înregistra o mărime fizică proporțională cu elongația intensității câmpului electric.

Valoarea medie a pătratului elongației câmpului electric al aceluiași semnal, în același interval de timp, este:

(6.2) $$\langle e^2(\mathbf{R}, t)\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{-t_1}^{+t_1} E^2(t)\exp[-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R} + \varphi_0)] \times$$
$$\times \exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R} + \varphi_0)]dt = E_0^2$$

Această valoare, proporțională cu pătratul amplitudinii intensității câmpului electric, fiind diferită de zero, este o mărime măsurabilă.

Sarcinile electrice aflate în câmp *em* sunt supuse unei forțe descrisă de relația (1.3), deci în domeniul unde sunt dispuse este prezentă o cantitate de energie *em* caracteristică câmpului. Această energie este caracterizată prin *densitatea de energie*, definită ca fiind energia câmpului *em* prezentă în unitatea de volum centrată în punctul în care se calculează. Densitatea de energie a câmpului *em* la momentul t este dată de relația:

(6.3) $$w(t) = \frac{1}{2\mu_0}[\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] + \frac{\varepsilon_0}{2}[\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t)] = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} e^2(t).$$

Dacă câmpul *em* se propagă în spațiu, atunci trebuie admis că la propagarea lui se transportă o cantitate de energie. Transportul de energie *em* se exprimă printr-un câmp vectorial $\mathbf{S}$ (vectorul Poynting). Direcția și sensul vectorului Poynting indică direcția și sensul de transport al energiei *em*, valoarea instantanee a acestei mărimi fiind dată de relația:

(6.4) $$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{e}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \frac{1}{c\mu_0} e^2(t)\mathbf{S}_0 = w(t)c\,\mathbf{S}_0.$$

Deoarece modulul vectorului Poynting este proporțional cu pătratul elongației intensității câmpului electric, valoarea medie în timp a acestei mărimi este diferită de zero, prin urmare toate mărimile fizice proporționale cu modulul acestuia vor fi mărimi măsurabile.

Se introduce noțiunea de *flux elementar mediu* ($d\Phi$) care este egală cu valoarea medie a cantității de energie *em* transportată în unitate de timp, printr-un element de suprafață, centrat în punctul în care se face aprecierea, de arie $d\Sigma$ și orientat prin versorul $\mathbf{N}$, pe direcție normală la această suprafață:

(6.5) $$d\Phi = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}\rangle d\Sigma$$

și cea de *densitate de flux de energie* - $\varphi(\mathbf{R})$ - o mărime numeric egală cu valoarea medie a cantității de energie transportată în unitate de timp printr-o arie elementară ($d\Sigma$), care conține punctul, orientată perpendicular pe direcția de transport a energiei ($\mathbf{S}_0$ paralel cu $\mathbf{N}$) și calculată pentru unitate de arie:

(6.6) $$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{d\Phi}{d\Sigma} = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}\rangle = \langle S\rangle(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N}).$$

Deci densitatea de flux reprezintă valoarea medie a mărimii vectorului Poynting, fiind o mărime scalară. Fluxul total al radiației optice care traversează o suprafață de arie (Σ), este dat de relația:

(6.7) $$\Delta\Phi = \int_{\Sigma} \varphi(\mathbf{R})d\Sigma = \int_{\Sigma} \langle S\rangle(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N})d\Sigma.$$

Pentru a studia propagarea radiațiilor optice se introduce noțiunea de "rază" de radiație optică, care reprezintă traiectoria de transport a energiei *em*; traiectoria îndeplinește condiția că în fiecare punct al spațiului prin care trece este tangentă la vectorul Poynting, calculat în acel punct. Prin urmare vectorul Poynting descrie în fiecare punct din spațiu direcția și sensul transportului de energie *em*, iar prin valoarea medie a modulului exprimă densitatea de flux asociată razei de radiație optică în punctul considerat.

Un ansamblu infinit de raze de radiație optică, care îndeplinește anumite condiții geometrice, formează un *fascicul de raze*. Din acest punct de vedere, unda *em* corespunde fasciculului de raze de radiație optică, iar acesta este caracterizat prin fluxul de energie.

O funcție periodică limitată în timp, de ex. de tipul celei definite de relația (6.1), poate fi exprimată prin integrale Fourier, conform relațiilor (4.8 a,b):

(a) $$e(\mathbf{R},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{R},\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{R},\nu)e^{i\omega t}d\omega,$$

unde $E(\mathbf{R},\nu)$ reprezintă amplitudinile armonicilor constituiente ale semnalului, fiind date de relația:

(b) $$E(\mathbf{R},\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\mathbf{R},t)e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\mathbf{R},t)e^{-i\omega t}dt$$

Din relația (a) rezultă: $e(\mathbf{R},t) \propto E(\mathbf{R},\nu)\Delta\nu \Rightarrow E(\mathbf{R},\nu) \propto \dfrac{e(\mathbf{R},t)}{\Delta\nu}$, ceea ce verifică relația (b): $E(\mathbf{R},\nu) \propto e(\mathbf{R},t)\Delta t$ și conduc la: $\Delta t \Delta\nu \approx 1$, deci mărimea $E(\mathbf{R},\nu)$ se măsoară în $\dfrac{V}{m\cdot Hz}$.

Densitatea de flux, conform relațiilor (6.4, 6.6) și folosind dezvoltarea Fourier a semnalului considerat, se poate scrie sub forma:

(6.8)

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{\Delta t}\int_{-t_1}^{+t_1} \frac{1}{c\mu_0} e^2(t)dt = \frac{1}{c\mu_0\Delta t}\int_{-t_1}^{+t_1} e(\mathbf{R},t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{E}(\mathbf{R},\omega)e^{i\omega_0 t}d\nu =$$

$$= \frac{1}{c\mu_0\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{E}(\mathbf{R},\omega)d\nu \int_{-t_1}^{+t_1} e(\mathbf{R},t)e^{i\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{c\mu_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{E}(\mathbf{R},\omega)\widetilde{E}^*(\mathbf{R},\omega)}{\Delta t}d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{R},\omega)d\nu,$$

unde s-a notat: $\widetilde{E}^*(\mathbf{R},\omega) = \int_{-t_1}^{+t_1} e(\mathbf{R},t)e^{i\omega_0 t}dt$ și:

$$\varphi(\mathbf{R},\omega) = \frac{1}{c\mu_0}\frac{\widetilde{E}(\mathbf{R},\omega)\widetilde{E}^*(\mathbf{R},\omega)}{\Delta t}$$

Pe baza relației (6.8) se poate defini mărimea fizică:

(6.9) $$\varphi(\mathbf{R},\omega) = \frac{d\varphi(\mathbf{R})}{d\nu},$$

denumită *densitate spectrală de flux* $\left(\dfrac{W}{m^2}\dfrac{1}{Hz}\right)$ de energie *em*. Aceasta reprezintă o mărime numeric egală cu densitatea de flux corespunzătoare armonicilor cu frecvențe cuprinse în intervalul $\left(\omega - \dfrac{d\omega}{2} \div \omega + \dfrac{d\omega}{2}\right)$, calculată pentru intervalul unitate de frecvență, iar fluxul spectral total este dat de relația:

(6.10) $$\Delta\Phi(\mathbf{R},\omega) = \int_{\Sigma} \varphi(\mathbf{R},\omega)(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N})d\Sigma.$$

Dacă se consideră o sursă punctiformă, căreia îi corespunde o undă sferică, se obțin relațiile:

(6.11) $$\varphi(\mathbf{R},\omega) = \frac{1}{c\mu_0}\frac{\widetilde{E}(\mathbf{R},\omega)\widetilde{E}^*(\mathbf{R},\omega)}{\Delta t} = \frac{1}{c\mu_0}\frac{E'^2(\omega)}{R^2\Delta t} = \frac{I(\omega)}{R^2},$$

unde: $$I(\omega) = \frac{1}{c\mu_0}\frac{E'^2(\omega)}{\Delta t}.$$

(6.12) $$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{R^2}\frac{1}{c\mu_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E'^2(\omega)}{\Delta t}d\nu = \frac{I}{R^2},$$ de unde:

(6.13) $$d\Phi = \varphi(\mathbf{R})d\Sigma = \frac{I}{R^2}(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N})d\Sigma, \text{ deci:}$$

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}\left(\frac{W}{str}\right) \text{ unde: } d\Omega = \frac{(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N})d\Sigma}{R^2}.$$

Intensitatea radiației optice este o mărime numeric egală cu fluxul de radiație optică care corespunde unui unghi solid elementar orientat pe direcția de propagare dată, calculat pentru unitatea de unghi solid. La fel se poate introduce noțiunea de *intensitate spectrală a radiației optice* ca fiind o mărime numeric egală cu fluxul spectral corespunzător unui unghi solid elementar, orientat pe direcția de propagare a radiației și calculat pentru unitate de unghi solid. Intensitatea de radiație optică, ca și densitatea de flux, poate caracteriza procesul de transport de energie *em* de-a lungul unei raze de radiație optică.

7. Structura spectrală a semnalelor *em*

7.1 Câmpul *em* emis de către un dipol electric liber amortizat

Câmpul *em* emis de către un dipol electric liber amortizat (fig. 3), conform relației (4.10), este de forma:

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{E}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i\omega_0 t}\right\} \quad t \geq 0$$

$$e(t) = 0 \quad t \langle 0$$

Aplitudinile componentelor armonice ale câmpului emis sunt date de relațiile:

$$\tilde{E}(\omega) = \tilde{E}_0 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt =$$

(7.1)
$$= \frac{\tilde{E}_0}{-\left[\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)\right]} e^{-\left[\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)\right]t}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\tilde{E}_0}{\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)},$$

iar densitatea spectrală de flux este:

(7.2)
$$\varphi(\omega) = \frac{\tilde{E}_0^2}{c\mu_0 \Delta t_0} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2}.$$

Funcția $\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2}$ descrie distribuția după frecvență a densităților spectrale de flux ale amplitudinilor componentelor Fourier constituiente ale semnalului considerat. De obicei această funcție se alege astfel încât să îndeplinească condiția de normare (4.17). Deoarece:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\left[4\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma_0^2}{4}\right) - 4\omega_0^2\right]^{1/2}} \mathrm{arctg} \frac{2(\omega - \omega_0)}{\left[4\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma_0^2}{4}\right) - 4\omega_0^2\right]^{1/2}}\Bigg|_0^{+\infty} =,$$

$$= \frac{2}{\gamma_0} \mathrm{arctg} \frac{2(\omega - \omega_0)}{\gamma_0}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\gamma_0}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\gamma_0}$$

unde: $\mathrm{arctg}\frac{\omega_0}{\gamma_0} \Rightarrow \frac{\pi}{2}$ $(\omega_0 \rangle\rangle \gamma_0)$, funcția normată care descrie structura spectrală a câmpului *em* emis de către dipolul liber amortizat are forma:

$$g_L(\omega, \omega_0) = \frac{\gamma_0}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} =$$

(7.3)
$$= \frac{2}{\Delta\omega_0 \pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2} = \frac{g_L(\omega_0)}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2}.$$

Această funcție, reprezentată în fig. , este caracterizată prin valoarea maximă:

$$g_L(\omega_0) = \frac{2}{\pi\Delta\omega_0} = \frac{0{,}637}{\Delta\omega_0}$$

şi prin lăţimea spectrală obţinută din condiţia:

$$g_L(\omega_1)=g_L(\omega_2)=\frac{g_L(\omega_0)}{2},\ \text{de unde: } \omega_1-\omega_0=\frac{\gamma_0}{2},$$

deci lăţimea spectrală este:

(7.4) $$\Delta\omega_0=\omega_1-\omega_2=2\frac{\gamma_0}{2}=\gamma_0=\frac{2}{T_1}$$

şi este cunoscută sub denumirea de *lăţime naturală* sau *lăţime radiativă*. Conturul de această formă este cunoscut sub denumirea de *conturul radiativ* sau *conturul Lorentz*.

Expresia densităţii spectrale de flux, corespunzătoare dipolului electric liber amortizat, devine:

(7.5) $$\varphi(\omega)=\frac{2\pi E_0^2}{c\,\mu_0\Delta t_0\,\Delta\omega_0}\,g_L(\omega,\omega_0)\ \left(\frac{W}{m^2}\frac{1}{Hz}\right).$$

Comparând relaţia (4.16) cu (6.10) se constată coincidenţa conturului normat de absorbţie al dipolului liber amortizat cu cel de emisie al aceluiaşi dipol.

7.2 Câmpul *em* de durată finită.

Câmpul *em* de durată finită ($\Delta t=2t_1$), conform relaţiei (6.1), este de forma:

$$e(t)=\mathrm{Re}\left\{E_0\,e^{i(\omega_0 t+\varphi_0)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\tilde{E}_0\,e^{i\omega_0 t}\right\}\quad -t_1\le t\le t_1$$
$$e(t)=0\quad t\langle -t_1 \text{ şi } t\rangle t_1,$$

unde amplitudinea E_0 este considerată constantă (fig. 8). Amplitudinile armonicelor Fourier ale semnalului sunt date de relaţiile:

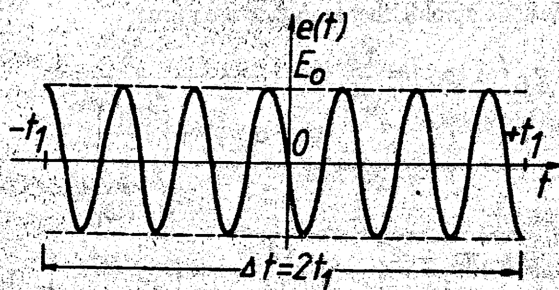


Fig. 8

(7.6) $$\tilde{E}(\omega)=\tilde{E}_0\int_{-t_1}^{+t_1}e^{i(\omega_0-\omega)t}dt=$$
$$=\tilde{E}_0\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t_1}-e^{-i(\omega_0-\omega)t_1}}{2i(\omega_0-\omega)t_1}\Delta t=\tilde{E}_0\,\Delta t\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t_1]}{(\omega_0-\omega)t_1},$$

iar densitatea spectrală de flux:

(7.7) $$\varphi(\omega)=\frac{1}{c\mu_0}\frac{\tilde{E}(\omega)\tilde{E}^*(\omega)}{\Delta t_0}=$$
$$=\frac{1}{c\mu_0}\frac{E_0^2(\Delta t)^2}{\Delta t_0}\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t_1]}{[(\omega_0-\omega)t_1]^2}=\frac{E_0^2(2t_1)^2}{c\mu_0\Delta t_0}g(\omega_0,\omega)$$

(Δt_0 reprezintă timpul de mediere; în cazul semnalului definit de (6.1) se poate considera $\Delta t=2t_1$), unde $g(\omega_0,\omega)$ reprezintă *funcţia de distribuţie spectrală* caracteristică semnalului considerat.

Din relaţia (7.2) rezultă că un câmp *em* de durată finită prezintă proprietăţile spectrale ale unui câmp obţinut prin suprapunerea unui număr infinit de câmpuri armonice, necorelate între ele printr-o relaţie de fază (faza câmpurilor armonice componente poate lua cu probabilitate egală orice valoare din domeniul ($-\pi\div+\pi$), cu amplitudini diferite pentru frecvenţe diferite. Reprezentarea grafică a funcţiei de distribuţie spectrală a semnalului este dată în fig. 9b, iar în fig. 9a este prezentată distribuţia spectrală a amplitudinilor Fourier ale acestuia. Rezultă că există o armonică de bază (ω_0) căreia îi corespunde densitatea de flux maximă (φ_0), iar celelalte armonici sunt dispuse simetric faţă de frecvenţa ω_0, densitatea de flux descrescând pe măsură ce creşte diferenţa frecvenţei lor faţă de frecvenţa armonicii de bază. Pentru a delimita domeniul de frecvenţe al armonicilor al căror efect nu poate fi neglijat în acţiunea radiaţiilor optice, prin convenţie sunt considerate drept limite valorile ω_1 şi ω_2 ale frecvenţelor pentru care valoarea densităţii de flux este egală cu jumătate din valoarea densităţii de flux a armonicii de bază. Se poate considera că intervalul de frecvenţe ($\nu_1-\nu_2$) este aprox. egal cu intervalul cuprins între ν_0 şi ν' - frecvenţa pentru care valoarea densităţii spectrale este egală cu zero:

$$\Delta\nu=\nu_1-\nu_2\cong\nu_0-\nu'.$$

Dar: $g(\nu')=0$, dacă: $(\omega_0-\omega')t_1=\pi$, de unde:

(7.8) $$\Delta\nu=\nu_0-\nu'=\frac{1}{2t_1}.$$

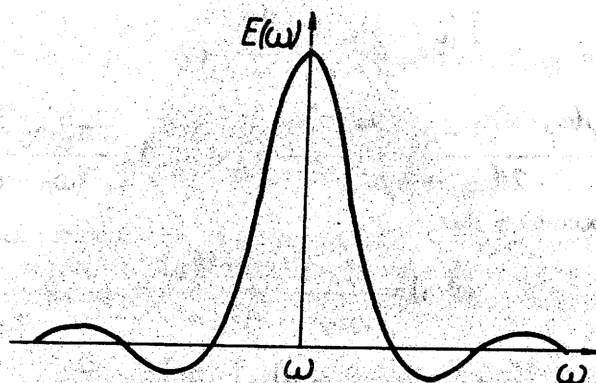


Fig. 9a.

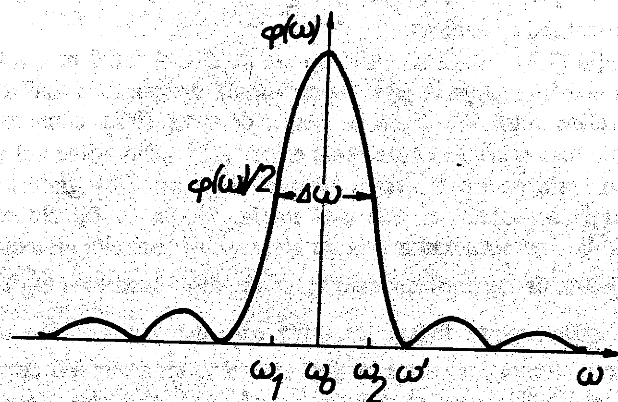


Fig. 9b

Mărimea $\Delta\nu = \dfrac{1}{2t_1}$ reprezintă *lățimea spectrală* a semnalului considerat.

Dacă valoarea intervalului $2t_1$ tinde la infinit, valoarea lățimii spectrale tinde la zero, adică se obține cazul undei armonice. Expresia lățimii spectrale exprimată în lungimi de undă are forma:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = c\left(\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1}\right) \cong c\frac{\Delta\nu}{\nu_0^2}.$$

Relația (7.8) arată că micșorarea duratei câmpului *em* determină creșterea lățimii spectrale. Un câmp de durată finită, deoarece poate fi exprimat printr-o infinitate de unde armonice, necorelate, cu frecvențele cuprinse într-un domeniu spectral dat, se numește *grup (pachet) de unde*.

Cap. II

CÂMPUL RADIAŢIILOR OPTICE

Pentru a descrie câmpul radiaţiei optice este necesar să se cunoască următoarele caracteristici ale acestuia:

- caracteristici geometrice;
- caracteristici spectrale;
- caracteristici de coerenţă temporală şi spaţială;
- caracteristici de polarizare.

Analiza acestor caracteristici se poate realiza dacă se apelează la nişte *modele fizice* de bază.

1. Caracteristici geometrice.

Pentru a analiza această problemă este necesar să se considere atât structura sursei care emite radiaţie optică, cât şi cea a câmpului emis de sursă. Sursele de radiaţie optică prezintă o extensie *tri*dimensională, conţinând un număr foarte mare de emiţători de radiaţie (din punct de vedere clasic - dipolul electric, corespunzător din punct de vedere cuantic - sistemul cuantic căruia i s-a asociat dipolul electric).

Pentru a modela sursa de radiaţie optică se introduce *modelul de sursă punctiformă*. Dimensiunile acestui model sunt astfel alese încât să îndeplinească condiţiile impuse de aproximaţia de dipol electric: diferenţa de fază dintre câmpurile emise de dipolii localizaţi la marginile opuse ale sursei să fie neglijabilă, prin urmare dimensiunile sursei trebuie să fie mult mai mici decât lungimea de undă a radiaţiei emise (vezi prg. I 2). Sursa extinsă de radiaţie optică se divizează în surse punctiforme, iar rezultatul final se obţine prin integrare asupra dimensiunilor acesteia. Dacă se consideră o sursă extinsă *bi*dimensională, atunci aceasta se divide în "surse punctiforme *bi*dimensionale".

După cum s-a stabilit în prg. I 3, modelul de dipol electric oscilant, model ce îndeplineşte condiţiile de sursă punctiformă (aproximaţia de dipol electric), emite câmp *em* sub formă de unde sferice, centrate în punctul unde este localizat modelul. Modelul de sursă punctiformă conţine un număr finit de dipoli electrici. Câmpul *em* radiat de acest model poate fi considerat tot sub formă de undă sferică, iar intensitatea componentei electrice, într-un punct dat al spaţiului, se obţine prin sumarea câmpurilor elementare emise de către toţi dipolii sursei punctiforme. (La sumare, deoarece sursa este punctiformă, se poate neglija variaţia fazei câmpului elementar determinată de dispunerea dipolilor în interiorul sursei). Componenta electrică a câmpului *em* creat de către *sursa extinsă* într-un punct dat al spaţiului se calculează prin integrare asupra tuturor surselor punctiforme în care a fost divizată sursa extinsă.

În cadrul opticii geometrice, pentru a descrie propagarea câmpului *em* se foloseşte modelul de rază de radiaţie optică (traiectoria de propagare a energiei câmpului *em*). Câmpul *em* dintr-un domeniu spaţial dat va fi descris de o distribuţie continuă de raze de radiaţie optică. Această distribuţie formează un *fascicul de raze optice*, care poate fi descris dacă se introduc nişte modele.

Din acest punct de vedere radiaţia optică emisă de o sursă punctiformă este modelată printr-un *fascicul divergent*. Focarul acestui fascicul este centrat în sursa punctiformă, iar dimensiunile laterale sunt limitate de deschiderea elementelor optice care diafragmează fasciculul. În mod corespunzător în focarul unui *fascicul convergent* se va forma imaginea unei surse punctiforme. Trecerea de la modelul de fascicul divergent la cel convergent se realizează prin *modelul fasciculului de raze paralele*. Acestuia îi corespunde o sursă punctiformă dispusă la o distanţă infinit de mare faţă de punctul unde se analizează câmpul, respectiv o imagine punctiformă dispusă la o distanţă infinit de mare faţă de acelaşi punct. Un fascicul oarecare de raze optice poate fi considerat ca fiind constituit dintr-o infinitate de fascicule paralele cu înclinări diferite faţă de axa optică.

Fasciculului divergent, respectiv convergent, de raze optice i se asociază o undă sferică a cărui centru este dispus în sursa punctiformă.

Prin urmare dacă se consideră o sursă extinsă, într-un punct dat al spaţiului, intensitatea componentei electrice a câmpului *em* reprezintă integrala asupra tuturor undelor, respectiv a tuturor razelor ce se intersectează în acel punct.

2. Structura spectrală.

Pentru a descrie structura spectrală a câmpului radiaţiilor optice se introduc următoarele modele.

1. Modelul cel mai simplu este cel al câmpului descris prin *unde armonice plane* sau *sferice*. Elongaţia câmpului este reprezentată printr-o funcţie de undă care prezintă o dependenţă armonică de timp:

(2.1) $$\mathrm{e}(\omega,\mathbf{r},t)=\mathrm{E}(\mathbf{r})\cos[\omega t+\phi(\mathbf{r})].$$

Câmpul real poate fi reprezentat şi printr-o funcţie complexă:

$$\tilde{\mathrm{e}}(\omega,\mathbf{r},t)=\mathrm{E}(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}e^{i\omega t}=\tilde{\mathrm{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t},\ \text{sau:}$$

(2.2) $$\mathrm{e}(\omega,\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\{\tilde{\mathrm{e}}(\omega,\mathbf{r},t)\}=\frac{1}{2}\left[\tilde{\mathrm{e}}(\omega,\mathbf{r},t)+\tilde{\mathrm{e}}(\omega,\mathbf{r},t)^{*}\right].$$

Mărimea $\tilde{e}(\omega,\mathbf{r},t)$, cunoscută sub denumirea de *funcţie de undă complexă* sau *semnal analitic* realizează descrierea completă a undei armonice. Mărimea $\tilde{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}$ reprezintă amplitudinea complexă sau fazorul elongaţiei complexe. Funcţia de undă $e(\omega,\mathbf{r},t)$ se poate scrie sub forma:

$$e(\omega,\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2}\left[\tilde{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t} + \tilde{E}(\mathbf{r})^{*}e^{-i\omega t}\right]. \tag{2.2'}$$

Intr-un punct dat $\mathbf{r}$ al spaţiului, folosind descrierea complexă, amplitudinea complexă $\tilde{E}(\mathbf{r},t)$ se reprezintă prin mărimea (modulul - $|\tilde{E}(\mathbf{r})| = E(\mathbf{r})$) amplitudinii undei câmpului, iar argumentul $\arg\{\tilde{E}(\mathbf{r})\} = \phi(\mathbf{r})$ reprezintă faza cîmpului. In aceeaşi descriere, funcţia de undă complexă $\tilde{e}(\omega,\mathbf{r},t)$, se reprezintă grafic printr-un fazor care se roteşte cu o viteză unghiulară egală cu pulsaţia undei (fig. 10).

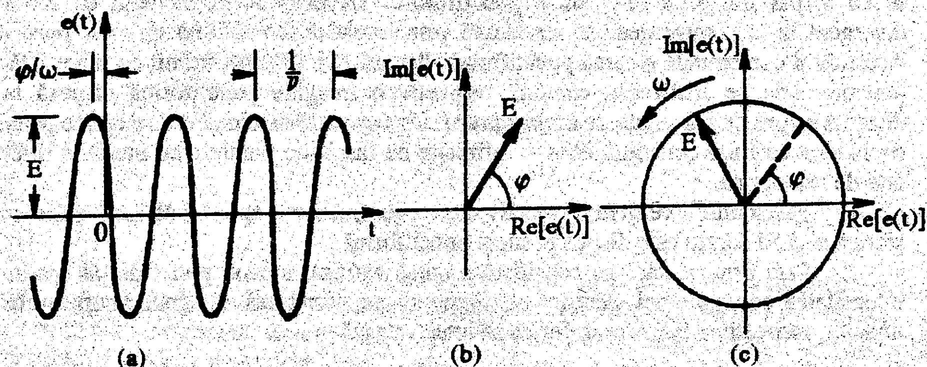


Fig. 10.

Funcţia de undă armonică reprezintă un model ideal, deoarece este definită pe domeniul de existenţă $-\infty\langle t\langle+\infty$ al variabilei t. Pe acest domeniu valoarea amplitudinii funcţiei este constantă. Două sau mai multe funcţii armonice cu aceeaşi pulsaţie, se deosebesc între ele prin valoarea fazei iniţiale. Dacă o funcţie armonică este considerată drept referenţial, toate armonicile cu aceeaşi frecvenţă şi aceeaşi orientare a direcţiei de acţiune a componentei electrice a câmpului *em* se vor deosebi de aceasta prin diferenţe de fază diferite a căror valoare variază în mod aleator, cu egală probabilitatate, în domeniul $(-\pi \div +\pi)\mathrm{rad}$.

2. Alt model prin care se poate reprezenta câmpul radiaţiei optice este *modelul de radiaţie monocromatică* (aceeaşi culoare). Acesta reprezintă o realitate fizică şi descrie radiaţia optică emisă de către un ansamblu de sisteme cuantice la tranziţia

acestora dintr-o stare energetică dată pe una inferioară. Intr-un punct al spaţiului unde se determină elongaţia câmpului radiaţiei optice, aceasta, la un moment dat, reprezintă superpoziţia câmpurilor elementare (relaţia fig.) emise de către sistemele cuantice ale ansamblului. Din această cauză, atât amplitudinea câmpului cât şi faza acestuia trebuie să depindă de timp.

O undă de tip monocromatic poate fi dezvoltată sub forma unei sume de unde armonice, utilizând metoda introdusă de către Fourier.

O funcţie dependentă în mod arbitrar de timp, de ex. Funcţia $e(\mathbf{R},t)$, poate fi considerată ca o superpoziţie de diferite funcţii armonice, caracterizate prin frecvenţe, amplitudini şi faze diferite, sub forma:

$$\tilde{e}(\mathbf{R},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{2.3}$$

unde mărimea $\tilde{E}(\omega)$ se determină efectuând transformata Fourier inversă:

$$\tilde{E}(\mathbf{R},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{e}(\mathbf{R},t)e^{-i\omega t}dt. \tag{2.3'}$$

Deoarece mărimea $e(\mathbf{R},t)$ este reală, atunci mărimea $\tilde{E}(\omega)$ poate fi exprimată printr-o funcţie simetrică faţă de variabila ω, adică $\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}^{*}(\omega)$. In aceste condiţii, dacă se folosesc aceste relaţii, integrala (2.3') se simplifică:

$$\int_{-\infty}^{0}\tilde{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{0}^{\infty}\tilde{E}(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{0}^{\infty}\tilde{E}^{*}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

adică funcţia $e(\mathbf{R},t)$ reprezintă suma dintre funcţia complexă şi funcţia conjugată-complex a acesteia.

Funcţia de undă complexă poate fi definită ca fiind egală cu dublul primului termen:

$$\tilde{e}(\mathbf{R},t) = 2\int_{0}^{+\infty} \tilde{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{2.4}$$

iar partea reală va fi:

$$e(\mathbf{R},t) = \mathrm{Re}\{\tilde{e}(\mathbf{R},t)\} = \frac{1}{2}\left[\tilde{e}(\mathbf{R},t) + \tilde{e}^{*}(\mathbf{R},t)\right]. \tag{2.5}$$

Funcţia de undă complexă (semnalul analitic complex) se obţine din funcţia de undă parcurgând următoarele etape:

- se determină transformata Fourier a acestei funcţii;
- se elimină "frecvenţele negative" şi se multiplică cu 2;
- se determină transformata Fourier inversă.

Deoarece fiecare componentă Fourier reprezintă o soluţie a ecuaţiei de undă, atunci şi funcţia de undă complexă $e(\mathbf{R},t)$ satisface această ecuaţie. In fig. 11 este

prezentată transformata Fourier a funcției de undă și a funcției de undă complexe în cazul radiației monocromatice.

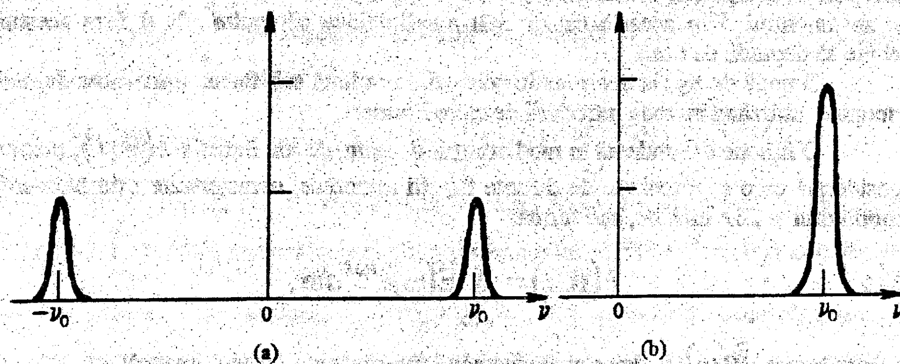


Fig. 11

Componentele Fourier ale unei unde monocromatice sunt dispuse într-un domeniu spectral caracterizat prin lățimea spectrală $\Delta\nu$ centrată pe frecvența centrală ν_0, care îndeplinește condiția $\Delta\nu \ll \nu_0$. Intensitatea energetică se exprimă prin intermediul funcției de undă conform relației:

$$I(\mathbf{R},t) = 2\langle e^2(\mathbf{R},t)\rangle = 2\left\langle \left\{\tilde{e}(\mathbf{R},t) + \tilde{e}^*(\mathbf{R},t)\right\}^2 \right\rangle =$$

(2.6)

$$= \frac{\langle \tilde{e}^2(\mathbf{R},t)\rangle}{2} + \frac{\langle \tilde{e}^{*2}(\mathbf{R},t)\rangle}{2} + \langle \tilde{e}(\mathbf{R},t)\tilde{e}^*(\mathbf{R},t)\rangle$$

Dacă unda este monocromatică caracterizată prin frecvența centrală ν_0 și lățimea spectrală $\Delta\nu \ll \nu_0$, media în timp trebuie să fie considerată pe un interval de timp mult mai mare decât perioada optică $1/\nu_0$, dar mult mai mică decât $1/\Delta\nu$. Deoarece $\tilde{e}(\mathbf{R},t)$ este dat de relația (2.4), termenul în $\tilde{e}^2(\mathbf{R},t)$ are o componentă care oscilează la frecvența $(2\omega_0)$, iar componenta mărimii $\tilde{e}^{*2}(\mathbf{R},t)$ oscilează la frecvența $(-2\omega_0)$. Media în timp a acestor termeni este egală cu zero. Variația în timp a celui de al treilea termen se realizează la o frecvență egală cu diferența de frecvență $\Delta\nu$, care este de ordinul $\Delta\nu \ll \nu_0$. Deoarece acest termen este lent-variabil în timp, nu este afectat de operația de mediere în timp și, ca rezultat, se obține:

(2.7) $$I(\mathbf{R},t) = |\tilde{e}(\mathbf{R},t)|^2.$$

Intensitatea energetică a undei monocromatice este dată de pătratul valorii modulului funcției de undă complexă. Din această cauză este comod să se lucreze cu funcția de undă complexă.

Modulul mărimii $\tilde{E}(\mathbf{R},\omega)$ definit de relația (2.3'), reprezintă amplitudinea undei armonice caracterizată prin frecvența ω. Funcția care descrie dependența de frecvență a amplitudinilor armonicilor reprezintă *funcția spectrală* (*conturul spectral*). Aceasta reprezintă înfășurătoarea (anvelopa) amplitudinilor funcțiilor de undă armonice constituente ale semnalului. In unele cazuri se cunoaște expresia matematică a unor funcții spectrale care descriu radiația monocromatică. De ex. radiația monocromatică emisă de către un dipol electric (sau un ansamblu de dipoli) care se relaxează radiativ este descrisă de o funcție de tip Lorentz (I 7.3). Dacă se consideră și procesele de ciocniri dintre constituenții ansamblului, atunci conturul spectral este descris tot de o funcție de tip Lorentz, dar cu lățime spectrală modificată (vezi). Dacă se consideră faptul că sursele elementare emițătoare ale ansamblului sunt în mișcare (lărgire Doppler), atunci funcția spectrală este de tip Gauss, sau atunci când se consideră atât procesul de ciocniri cât și deplasarea Doppler conturul spectral este de tip Voigt.

Din cele prezentate rezultă următoarele:

- intensitatea componentei electrice a câmpului radiației optice poate fi exprimată printr-o funcție dependentă de timp, deci în *reprezentarea temporală*;
- folosind tehnica transformatei Fourier, aceeași mărime poate fi exprimată prin intermediul componentelor armonice, deci în *reprezentarea în frecvență*.

Cele două reprezentări sunt echivalente.

3. *Radiație cvazimonocromatică.* Prin acest model se descrie radiația cuprinsă într-un domeniu spectral suficient de larg $(\Delta\nu < \nu_0)$, unde ν_0 fixează aproximativ centrul domeniului spectral considerat. Drept ex. putem considera radiația dintr-un domeniu spectral filtrat cu ajutorul unui monocromator sau a unui filtru optic. Distribuția intensității energetice în domeniul spectral considerat este definită de caracteristicile dispozitivului de filtrare. Aceasta reprezintă înfășurătoarea intensității energetice a componentelor armonice ale semnalului.

Funcții spectrale. Deoarece folosind receptorii actuali de radiație optică nu se poate înregistra fenomenul de bătăi, se poate accepta ideea independenței câmpurilor cu frecvențe diferite. Prin urmare densitatea totală de flux a câmpului *em* constituit din câmpuri armonice cu frecvențe diferite este egală cu suma densităților fiecărui câmp:

$$\langle e(t)^2\rangle = \langle e_1(t)^2\rangle + \langle e_2(t)^2\rangle + \cdots + \langle e_n(t)^2\rangle + \cdots$$

$$\varphi_{total} = \varphi_1(\nu_1) + \varphi_2(\nu_2) + \cdots + \varphi_n(\nu_n) + \cdots,$$

sau dacă câmpul prezintă o distribuție continuă după frecvență:

$$\varphi_{total} = \int_0^\infty \varphi(\nu)d\nu,$$

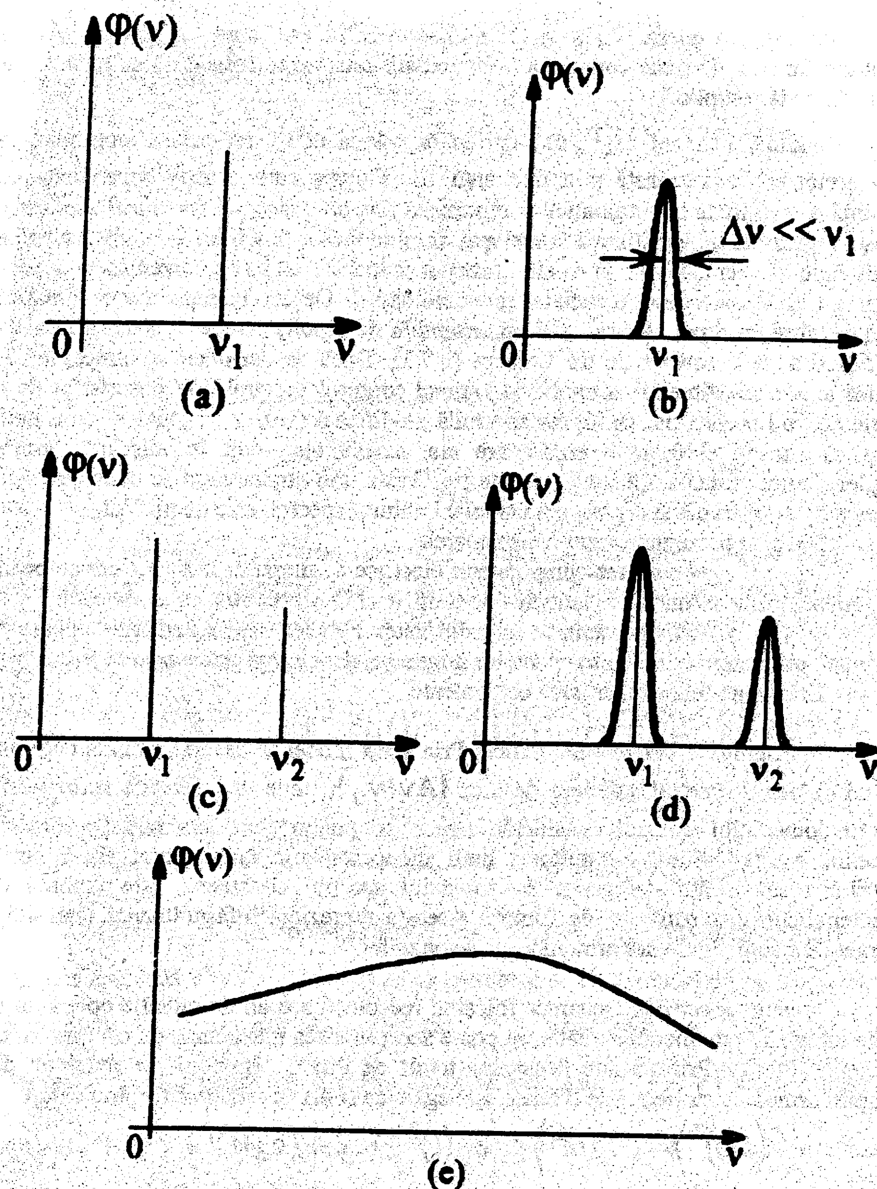


Fig. 12

unde: $\varphi(\nu)d\nu$ reprezintă fluxul corespunzător intervalului de frecvențe $\nu-\frac{d\nu}{2}\div\nu+\frac{d\nu}{2}$, iar mărimea $\varphi(\nu)$ descrie distribuția energiei în domeniul

spectral considerat. Deoarece este dificil să se determine valoarea absolută a mărimii $\varphi(\nu)d\nu$, se preferă o ***mărime relativă***. Pentru a caracteriza distribuția energiei într-un domeniu spectral se introduce ***funcția de distribuție spectrală*** (***conturul spectral***):

$$g(\nu)=\frac{\varphi(\nu)}{\varphi_{total}(\nu)},$$

care are proprietatea de a fi normată:

$$\int_0^{\infty} g(\nu)d\nu = 1.$$

In fig. 12 este prezentată funcția de distribuție spectrală caracteristică unor tipuri de câmpuri *em*: armonic (a, c), monocromatic (b, d) și cvazimonocromatic (e).

Funcția spectrală a câmpului optic ideal (câmpul armonic), este reprezentată de conturul funcționalei-δ:

$$g(\nu)=\delta(\nu-\nu_1),\ \text{respectiv:}\ \int_0^{\infty} g(\nu)d\nu=\int_0^{\infty}\delta(\nu-\nu_1)d\nu=1,$$

unde funcționala-δ, are proprietatea:

$$\delta(\nu-\nu_1)=0,\ \text{dacă:}\ \nu\neq\nu_1,\ \text{respectiv}\ \delta(\nu-\nu_1)=1,\ \text{dacă:}\ \nu=\nu_1.$$

Dependența de frecvență a mărimii $\varphi(\nu)d\nu$ se determină cu ajutorul spectrometrului cu prismă, cu rețea de difracție sau de tip Fabry-Perot. Aceeași mărime se poate determina și prin metodele *spectroscopiei interferențiale*, folosind distribuția vizibilității tabloului de interferență.

3. Coerența temporală și spațială a radiației optice

Fenomenul de interferență reprezintă compunerea, într-un punct dat al spațiului, a două sau mai multe câmpuri. Dacă acestea sunt dependente de timp atunci rezultatul compunerii depinde de timp. Rezultatul interferenței fasciculelor de radiație optică cu aceeași frecvență sau cu frecvențe diferite nu se poate înregistra în mod obișnuit, deoarece, pe de o parte, în domeniul frecvențelor optice nu există detectori de radiație cu rezoluție temporală corespunzătoare, iar pe de altă parte datorită structurii radiației optice apar variații în timp care necesită detectori cu o rezoluție temporală și mai bună. Din această cauză detectorii de radiație optică realizează o mediere a rezultatului interferenței pe un interval de timp caracteristic detectorului.

3.1 Interferența a două fascicule de radiație optică cu frecvențe diferite.

In condiții experimentale obișnuite nu se poate înregistra rezultatul valorii instantanee a interferenței fasciculelor de radiație optică cu frecvențe diferite.

1) Să analizăm cazul cel mai simplu al câmpului *em* constituit din *două semnale armonice*:

$$e_1(t)=E_1\cos(\omega_1 t+\phi_1) \text{ și } e_2(t)=E_2\cos(\omega_2 t+\phi_2),$$

unde mărimile E_1 și E_2, respectiv ϕ_1 și ϕ_2 sunt independente de timp. Intensitatea câmpului electric rezultant este dată de relația:

$$e(t)=e_1(t)+e_2(t)=E_0[\cos(\omega_1 t+\phi_1)+\cos(\omega_2 t+\phi_2)]=$$

(3.1 1) $$=2E_0\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)=,$$

$$=E\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

unde s-a considerat: $E_1=E_2=E_0$. Deoarece valoarea mărimilor ϕ_1 și ϕ_2 este independentă de timp, elongația rezultantă variază periodic cu frecvența $\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$, iar amplitudinea este modulată cu frecvența $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$, manifestându-se *fenomenul de bătăi*.

După cum s-a prezentat în prg. I 6, atunci când se efectuează măsurători asupra câmpului radiației optice, receptorul de radiație realizează o mediere în timp asupra pătratului elongației câmpului. Densitatea de flux într-un punct al câmpului de interferență, reprezintă valoarea medie a vectorului Poynting, calculată pe intervalul de timp $\left(t_0-\frac{T}{2}\div t_0+\frac{T}{2}\right)$, unde T reprezintă *intervalul de măsură*, centrat pe momentul t_0:

(3.1 2)

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{c\mu_0}\left\langle[e_1(t)+e_2(t)]^2\right\rangle=\frac{1}{c\mu_0}\left[\left\langle e_1(t)^2\right\rangle+\left\langle e_2(t)^2\right\rangle+2\left\langle e_1(t)e_2(t)\right\rangle\right]$$

unde:

(3.1 2') $$\left\langle e_1(t_0)^2\right\rangle=\frac{E_1^2}{2}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}}\cos^2(\omega_1 t+\phi_1)dt=$$

$$=\frac{E_1^2}{2}\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\Bigg|_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}}+\frac{1}{2}\int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}}\cos^0\theta dt\right\}=,$$

$$=\frac{E_1^2}{2T}\left(t_0+\frac{T}{2}-t_0+\frac{T}{2}\right)=\frac{E_1^2}{2}$$

(3.1 2")

$$\left\langle e_1(t)e_2(t)\right\rangle=$$

$$=\frac{E_1E_2}{2}\left\{\left\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi_1-\phi_2]\right\rangle+\left\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi_1+\phi_2]\right\rangle\right\}$$

Fazele celor două câmpuri sunt independente de timp, deci diferența de fază este constantă în timp. Din relația (3.1 2") rezultă că fenomenul de bătai poate fi observat numai dacă cele două frecvențe sunt foarte apropiate, astfel încât $(\omega_1-\omega_2)T\langle 1$. Deoarece în domeniul optic mărimea $(\omega_1+\omega_2)$ are o valoare foarte mare, în intervalul timpului de măsură T, funcția $\cos(\omega_1+\omega_2)t$ prezintă multe oscilații, iar valoarea medie a termenului al doilea al relației (3.1 2") este egală cu zero. Relativ la primul termen, dacă există relația $(\omega_1-\omega_2)T\rangle\rangle 1$, în același interval de măsură, funcția *cosinus* prezintă un număr mare de oscilații, deci valoarea medie deasemenea va fi egală cu zero.

2) Dacă cele două semnale reprezintă *fascicule de radiație optică monocromatică* atunci $E_1(t)$ și $E_2(t)$, respectiv $\phi_1(t)$ și $\phi_2(t)$ sunt *mărimi lent-variabile în timp*, iar densitatea de flux rezultantă este:

(3.1 3)

$$\varphi(t_0)=$$

$$=\frac{1}{c\mu_0}\left\{\frac{\left\langle E_1(t)^2\right\rangle}{2}+\frac{\left\langle E_2(t)^2\right\rangle}{2}+\left\langle E_1(t)E_2(t)\right\rangle\cos[\cos(\omega_1-\omega_1)t+\phi_1(t)-\phi_2(t)]\right\}$$

Dacă $(\omega_1-\omega_2)T\rangle\rangle 1$, nici în acest caz nu se poate observa fenomenul de bătăi deoarece valoarea medie a ultimului termen este egală cu zero. In plus, în acest caz diferența de fază depinde de timp în mod aleator.

Prin urmare pentru a observa fenomenul de bătăi în cazul radiației optice, este necesar să fie îndeplinite condițiile:

- timpul de mediere al receptorului să fie mic față de intervalul bătăilor: $T\langle\langle t_b=\frac{1}{2(\nu_1-\nu_2)}$;

- diferența de fază $\Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ trebuie să prezinte o valoare constantă ($\Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t) \cong ct$) cel puțin pe intervalul câtorva bătăi.

Dacă aceaste condiții nu sunt îndeplinite, nu se poate observa fenomenul de bătăi, deoarece argumentul funcției *cosinus* se va modifica în timp, ceea face ca valoarea medie a relației (3.1 2") să tindă la zero. Această condiție se poate realiza numai dacă *timpul de coerență mutuală* (timpul în care valoarea variației de fază prezintă o fluctuație mai mică de $1\,\mathrm{rad}$) este mare față de perioada bătăilor.

Spre deosebire de fluctuațiile mărimilor $\phi_1(t)$ și $\phi_2(t)$ care "distrug" bătăile, fluctuațiile mărimilor $E_1(t)$ și $E_2(t)$ nu le "distrug", ci numai le modulează amplitudinea.

Cele două condiții ar putea fi realizate utilizând de ex. un interferometru Michelson, în care o oglindă este deplasată cu viteză constantă. Frecvența fasciculului reflectat sub incidență normală de către oglinda care se deplasează, față de frecvența fasciculului reflectat de oglinda fixă, este modificată prin efect Doppler:

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \nu - \left(\nu \pm \frac{2\nu v}{c}\right) = \frac{2v}{c}\nu$$

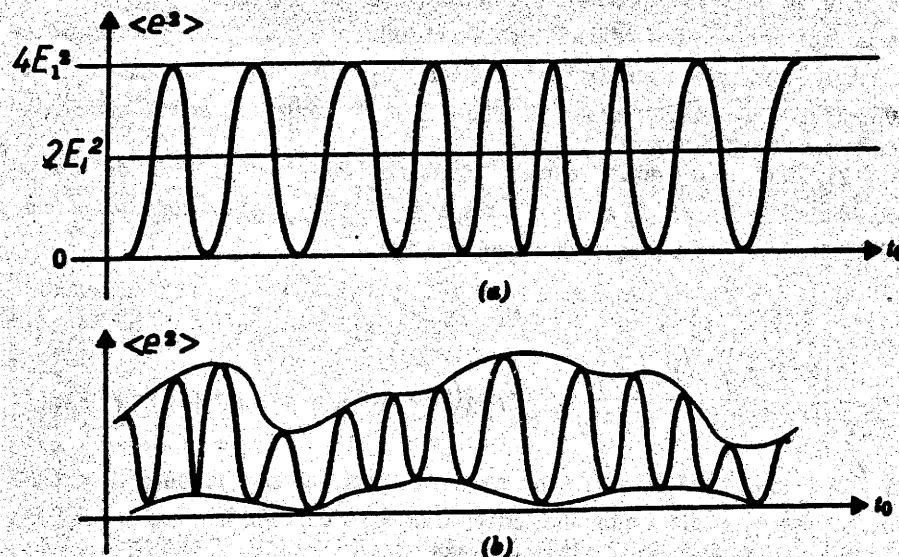


Fig. 13 a,b

(factorul 2 apare deoarece fasciculul reflectat parcurge de două ori distanța pe care se deplasează oglinda). In acest mod se obține un fascicul a cărui frecvență este modificată funcție de viteza oglinzii și care, prin interferență cu primul fascicul, conduce la

fenomenul de bătăi. In acest experiment diferența de fază dintre cele două fascicule se menține constantă atâta timp cât timpurile de coerență sunt mari față de intervalul dintre bătăi.

In fig. 13 a este prezentată variația în timp a fluxului de radiație optică corespunzătoare fenomenului de bătăi. S-a considerat că mărimile $E_1 \cong E_2$ sunt constante în timp, iar medierea s-a efectuat în jurul unor momente t_0, intervalul de mediere fiind mic față de intervalul dintre bătăi. Fenomenul se observă numai în intervalul de timp în care diferențe de fază se menține constantă. Dacă mărimile $E_1(t)$ și $E_2(t)$ prezintă fluctuații în timp la aceeași scară ca și mărimile $\phi_1(t)$ și $\phi_2(t)$, acestea vor modula amplitudinea bătăilor (fig. 13 b).

Fenomenul de bătăi a fost înregistrat de către A.T. Forrester, R.A. Cudmundsen, P.C. Johnson [Phys.Rev., 99, 1691 (1955)] folosind radiația optică emisă de către o sursă termică (lampă cu vapori Hg la presiune joasă). Drept sursă de radiație au fost folosite componentele dubletului Zeeman al liniei $546{,}1\,\mathrm{nm}$, celelalte linii fiind filtrate. Diferența de frecvență $\Delta\nu \cong 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ este proporțională cu inducția câmpului magnetic. Pentru a satisface condiția de coerență $\left(\tau \rangle \frac{1}{\Delta\nu}\right)$, valoarea timpurilor de corelare a fost egală cu $\tau_1 \cong \tau_2 = 10^{-9}\,\mathrm{s}$. Folosind o tehnică specială au fost înregistrate bătăi cu frecvența $10^{10}\,\mathrm{Hz}$, raportul semnal/zgomot fiind aprox. egal cu 10^{-4}.

3.2 Spectroscopie interferențială.

Un spectrometru interferențial reprezintă un interferometru Michelson modificat pentru a utiliza fascicule colimate (fig. 14). Imaginea sursei S se formează în planul focal al lentilei L_2, unde este dispus receptorul de radiație optică. Deoarece unghiul de incidență pe oglinzi al radiației este egal cu zero, variația fazei determinată de deplasare oglinzii O_2 față de imaginea ei O_1' este:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_1} 2d = 2\pi\nu_1\tau = \omega_1\tau,$$

unde: $\tau = \dfrac{2d}{c}$ reprezintă *timpul de retardare* al unui fascicul față de celălalt determinat de deplasarea d a oglinzii.

Să analizăm aspectul tabloului de interferență pentru semnale la intrare spectrometrului a căror structură spectrală este cunoscută.

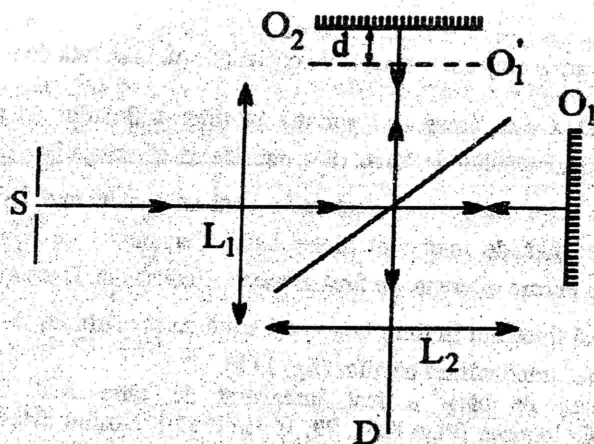


Fig. 14

1. Dacă semnalul este reprezentat de un *câmp armonic*, variaţia densităţii de flux la nivelul detectorului, determinată de deplasarea oglinzii, este:

(3.2 1)
$$\varphi_d(\tau)=\frac{1}{c\mu_0}\left\langle(e_1+e_2)^2\right\rangle=$$
$$=\varphi_1+\varphi_2+2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}\cos\frac{2d\omega_1}{c}=\varphi_0(1+x\cos\omega_1\tau)$$

unde: $x=\frac{2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}}{\varphi_1+\varphi_2}$, iar: $\varphi_0=\varphi_1+\varphi_2$ reprezintă densitatea de flux la intrarea interferometrului. Dacă divizorul de amplitudine este perfect $(\varphi_1=\varphi_2)$, deci $(x=1)$, densitatea de flux la nivelul detectorului este constituită dintr-un termen constant şi unul oscilant:

$$\varphi_d(\tau)=\varphi_0+\varphi_0\cos\omega_1\tau=\varphi_0+\varphi_{oscilant}.$$

Termenul oscilant poate fi normat sub forma:

(3.2 2)
$$\gamma(\tau)=\frac{\varphi_{osc}}{\varphi_0}=\cos\omega_1\tau,$$

limitele variaţiei densităţii de flux fiind egale cu: $\varphi_M=2\varphi_0$, respectiv: $\varphi_m=0$ (media în timp a termenului oscilant este egală cu zero). Relaţia (3.2 2) evidenţiază faptul că funcţia $\gamma(\tau)$ conţine informaţii privind structura spectrală a semnalului incident.

Pentru a caracteriza variaţia densităţii de flux la nivelul detectorului în diferite puncte ale tabloului de interferenţă, prin definiţie se introduce mărimea fizică cunoscută sub denumirea de *vizibilitate a tabloului de interferenţă*, sub forma:

(3.2 3)
$$V=\frac{\varphi_M-\varphi_m}{\varphi_M+\varphi_m}.$$

Această mărime se defineşte într-un punct al tabloului, iar φ_M reprezintă valoarea densităţii maxime de flux în vecinătatea acelui punct, respectiv φ_m valoarea densităţii minime în vecinătatea aceluiaşi punct.

In cazul câmpului armonic (pentru $x=1$), vizibilitatea are valoarea $V=1$.

2. Semnalul la intrarea interferometrului este constituit din *două câmpuri armonice*:

(3.2 4)
$$\varphi_0(\nu)=\varphi_{01}(\nu_1)+\varphi_{02}(\nu_2).$$

In acest caz: $g(\nu_1)=\frac{\varphi_{01}}{\varphi_0}$, respectiv: $g(\nu_2)=\frac{\varphi_{02}}{\varphi_0}$, deci: $\varphi_{01}=g(\nu_1)\varphi_0$, respectiv: $\varphi_{02}=g(\nu_2)\varphi_0$, unde $g(\nu)$ reprezintă *funcţia de distribuţie spectrală*. Câmpurile considerate fiind armonice, funcţia de distribuţie spectrală totală are forma:

$$g(\nu)=g(\nu_1)\delta(\nu-\nu_1)+g(\nu_2)\delta(\nu-\nu_2).$$

Deoarece această funcţie este normată, există relaţia:

$$g(\nu_2)=1-g(\nu_1).$$

Cele două câmpuri fiind independente, densitatea de flux la nivelul detectorului este constituită din suma densităţilor de flux:

$$\varphi_d(\tau)=\varphi_{d1}(\tau)+\varphi_{d2}(\tau)=\varphi_{01}(1+\cos\omega_1\tau)+\varphi_{02}(1+\cos\omega_2\tau)=$$
$$=\varphi_0+\varphi_{osc}=\varphi_0[1+\gamma(\tau)]$$

Termenul oscilant normat este de forma:

(3.2 5)
$$\gamma(\tau)=\frac{\varphi_{01}}{\varphi_{01}+\varphi_{02}}\cos\omega_1\tau+\frac{\varphi_{02}}{\varphi_{01}+\varphi_{02}}\cos\omega_2\tau=$$
$$=g_1(\nu_1)\cos\omega_1\tau+g_2(\nu_2)\cos\omega_2\tau=g_1(\nu_1)\gamma_1(\tau)+g_2(\nu_2)\gamma_2(\tau)$$

Din relaţia (3.2 5) rezultă că *funcţia* $\gamma(\tau)$ *conţine informaţii relativ la funcţia de distribuţie spectrală a semnalului incident.*

In fig. 15 este prezentat rezultatul fenomenului de interferenţă. Fig. 15 a se referă la cazul prezenţei la intrarea interferometrului a unui semnal armonic de tipul celui prezentat în fig. 12 a. In cazul fig. 15 b, la intrarea interferometrului sunt prezente două câmpuri armonice (ν_1 şi ν_2 - fig. 12 c) a căror intensităţi spectrale sunt egale,

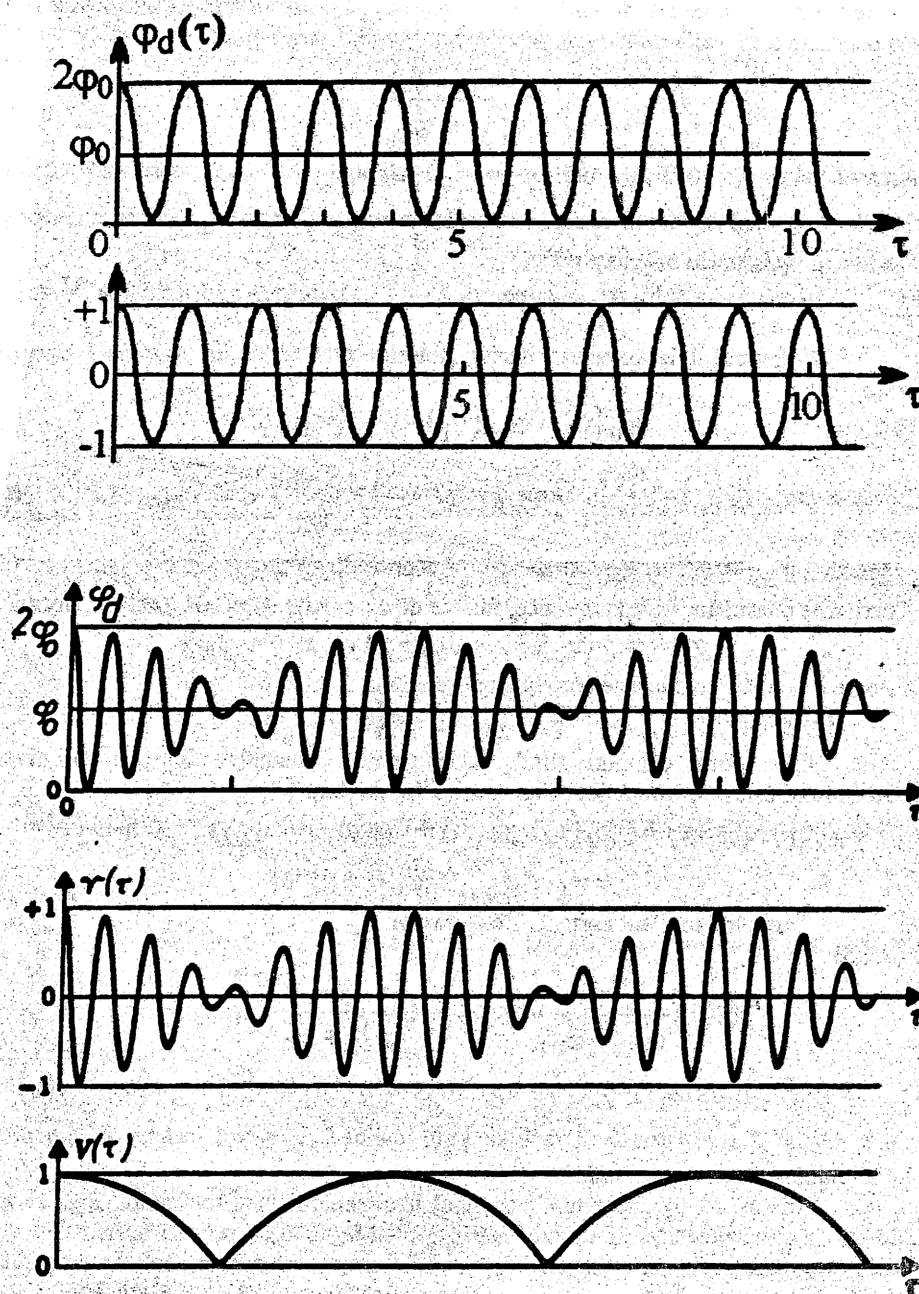


Fig. 15 a,b

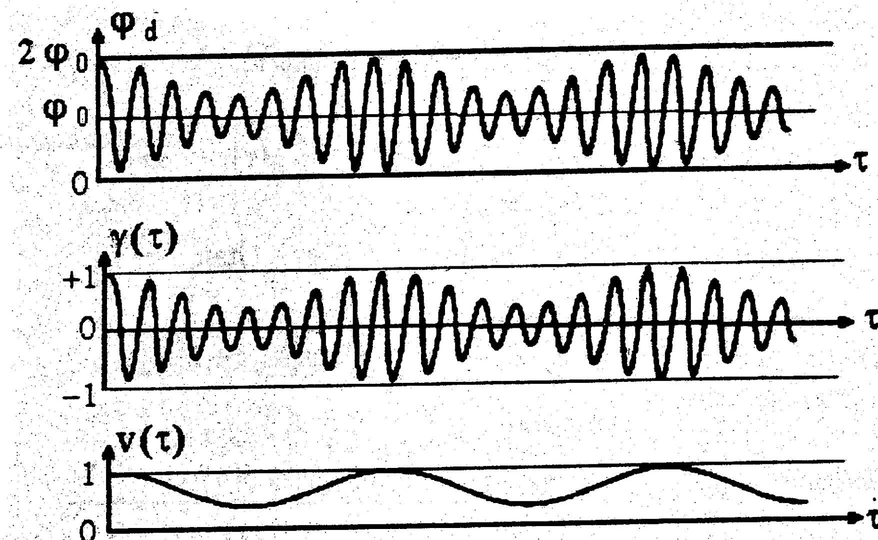


Fig. 15 c

iar în cazul fig. 15 c cele două intensităţi spectrale sunt diferite, ceea ce se reflectă în vizibilitatea tabloului de interferenţă.

Pentru a descrie vizibilitatea tabloului de interferenţă, funcţia $\gamma(\tau)$ se poate exprima sub o altă formă, introducând notaţiile:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ şi } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

de unde:

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \text{ respectiv: } \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}.$$

Folosind aceste notaţii, relaţia (3.2 5) devine:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= g_1(\nu_1)\cos\omega_1\tau + [1 - g_1(\nu_1)]\cos\omega_2\tau = \\ &= g_1(\nu_1)\cos\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau + [1 - g_1(\nu_1)]\cos\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau = \\ &= \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)\cos(\omega_0\tau) - (2g_1 - 1)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)\sin(\omega_0\tau) = \\ &= C(\tau)\cos(\omega_0\tau) + S(\tau)\sin(\omega_0\tau) = U(\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)] \end{aligned} \quad (3.2\ 5'),$$

unde s-a notat:

$$C(\tau)=\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)=U(\tau)\cos\phi(\tau),$$

$$-S(\tau)=(2g_1-1)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)=U(\tau)\sin\phi(\tau),\text{ respectiv:}$$

$$U(\tau)=\sqrt{C^2(\tau)+S^2(\tau)}\text{ și }\tan\phi(\tau)=(2g_1-1)\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right).$$

Expresia densității de flux devine:

(3.2 6) $$\varphi_d(\tau)=\varphi_0[1+\gamma(\tau)]=\varphi_0\{1+U(\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]\},$$

având valorile extreme:

$$\varphi_{d_M}=\varphi_0[1+U(\tau)]\text{ și }\varphi_{d_m}=\varphi_0[1-U(\tau)].$$

Vizibilitatea tabloului de interferență este descrisă de relația:

$$V(\tau)=U(\tau)=\sqrt{\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)+\left(4g_1^2-4g_1+1\right)\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)}=$$

(3.2 7) $$=\sqrt{1+4g_1(1-g_1)\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)}$$

care variază între valorile extreme:

$$V_M=1\text{ și }V_m=V(\tau)=\sqrt{1+4g_1^2-4g_1}=|1-2g_1|.$$

Dacă $\Delta\omega\langle\langle\omega_0$, deplasarea oglinzii (variația mărimii τ) determină o variație lentă a densității de flux.

3. La intrarea spectrometrului interferențial este incident un câmp de radiație optică de tip *monocromatic*. Funcția de distribuție spectrală a radiației monocromatice este centrată pe o frecvență dată ν_0 și tinde la zero cu cât ν se îndepărtează de ν_0. Se definește lățimea domeniului spectral $\Delta\nu=\nu_2-\nu_1$, drept domeniul pentru care valorea lui $g(\nu)$ prezintă o contribuție importantă la valoarea integrală a lui g. Prin convenție mărimile $\nu_2=\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2}$ și $\nu_1=\nu_0-\frac{\Delta\nu}{2}$ sunt frecvențele pentru care este îndeplinită condiția: $g(\nu_1)=g(\nu_2)=\frac{g(\nu_0)}{2}$. Radiația optică se consideră monocromatică dacă este îndeplinită condiția $\Delta\nu\langle\langle\nu_0$.

Dacă se introduce variabila $\mu=\nu-\nu_0$ (se modifică valoarea de referință), atunci: $g(\nu)=D(\nu-\nu_0)=D(\mu)$, unde $D(\mu)$ prezintă valori neglijabile exceptând domeniul: $-\frac{\Delta\nu}{2}\langle\mu\langle\frac{\Delta\nu}{2}$.

Deoarece $g(\nu)$ este o mărime normată se obține:

$$\int_0^\infty g(\nu)d\nu=\int_{-\nu_0}^\infty D(\mu)d\mu\cong\int_{-\infty}^\infty D(\mu)d\mu=1,$$

unde: $\mu=\nu-\nu_0$, $d\mu=d\nu$ și pentru $\nu=0\rightarrow\mu=-\nu_0$.

Expresia funcției de corelare devine:

$$\gamma(\tau)=\int_0^\infty g(\nu)\cos 2\pi\nu\tau d\nu=\int_{-\nu_0}^\infty D(\mu)\cos 2\pi(\nu_0+\mu)\tau d\mu\cong$$

(3.2 8) $$\cong\int_{-\infty}^\infty D(\mu)\cos 2\pi(\nu_0+\mu)\tau d\mu=$$

$$=\cos\omega_0\tau\int_{-\infty}^\infty D(\mu)\cos 2\pi\mu\tau d\mu-\sin\omega_0\tau\int_{-\infty}^\infty D(\mu)\sin 2\pi\mu\tau d\mu=$$

$$=C(\tau)\cos\omega_0\tau+S(\tau)\sin\omega_0\tau=U(\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]$$

unde: $$C(\tau)=\int_{-\infty}^\infty D(\mu)\cos 2\pi\mu\tau d\mu=U(\tau)\cos\phi(\tau),$$

$$S(\tau)=\int_{-\infty}^\infty D(\mu)\sin 2\pi\mu\tau d\mu=U(\tau)\sin\phi(\tau),$$

iar: $U(\tau)=\sqrt{C^2(\tau)+S^2(\tau)}$, respectiv: $\tan\phi(\tau)=-\frac{S(\tau)}{C(\tau)}$.

Observații:

- Mărimile $C(\tau)$, $S(\tau)$, respectiv $U(\tau)$, $\phi(\tau)$ sunt funcții lent-variabile față de variația funcției $\cos\omega_0\tau$;
- Mărimile $C(\tau)$ și $S(\tau)$, pentru $\tau=0$, îndeplinesc condițiile:

$$C(0)=1\text{ și }S(0)=0;$$

- Mărimea $U(\tau)$ îndeplineşte condiţia: $0 \le U(\tau) \le 1$;

- Dacă funcţia de distribuţie spectrală $g(\nu)$ este simetrică faţă de ν_0, atunci mărimea $D(\mu)$ este o funcţie pară $D(\mu) = D(-\mu)$, însă funcţia $\cos 2\pi\mu\tau$ fiind impară, produsul celor două funcţii va fi impar, prin urmare $S(\tau) = 0$.

Dacă *radiaţia monocromatică* este caracterizată printr-o funcţie de distribuţie spectrală $g(\nu)$ simetrică, termenul oscilant normat devine:

$$\gamma(\tau) = C(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

Densitatea spectrală de flux variază între limitele:

$$\varphi_M = \varphi_0[1 + U(\tau)] \text{ şi } \varphi_m = \varphi_0[1 - U(\tau)],$$

iar expresia vizibilităţii devine: $V(\tau) = U(\tau)$. In acest caz se obţine: $V(\tau) = C(\tau)$.

Exemplu. La intrarea spectrometrului interferenţial este incident un câmp de radiaţie monocromatică caracterizată printr-o funcţie de distribuţie spectrală de tip Gauss (fig. 16 b), descrisă de expresia:

(3.2 9) $$g(\nu) = D(\mu = \nu - \nu_0) = \sqrt{\pi}\tau_D e^{-\pi^2(\nu-\nu_0)^2\tau_D^2},$$

caracterizată prin valoarea maximă: $g(\nu_0) = \sqrt{\pi}\tau_D$ şi prin lăţimea spectrală, definită prin valorile frecvenţei pentru care valoarea $g(\nu)$ este de *e* ori mai mică faţă de valoarea maximă: $g(\nu_1) = \dfrac{g(\nu_0)}{e}$.

Deci: $$g(\nu) = \sqrt{\pi}\tau_D \exp\left[-\pi^2(\nu_1 - \nu_0)\tau_D^2\right] = \frac{\sqrt{\pi}\tau_D}{e},$$

de unde: $$\Delta\nu' = \nu_1 - \nu_0 = \frac{1}{\pi\tau_D}, \text{ iar: } \Delta\nu = 2\Delta\nu' = \frac{2}{\pi\tau_D}.$$

Conturul funcţiei spectrale (3.2 9) este normat:

$$\sqrt{\pi}\tau_D \int_0^\infty \exp\left[-\pi^2(\nu_1 - \nu_0)\tau_D^2\right]d\nu = \sqrt{\pi}\tau_D \frac{1}{\pi\tau_D}\int_{-\pi\nu_0\tau_D}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1,$$

unde: $x = \pi\tau_D(\nu - \nu_0)$, $d\nu = \dfrac{dx}{\pi\tau_D}$, la: $\nu = 0$ corespunde: $x = -\pi\tau_D\nu_0$,

iar: $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Deoarece funcţia de distribuţie spectrală este simetrică, termenul oscilant normat este de forma:

$$\gamma(\tau) = C(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

unde:

(3.2 10)
$$C(\tau) = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}\tau_D e^{-\pi^2\mu^2\tau_D^2} e^{i2\pi\mu\tau}d\mu\right\} =$$

$$= \sqrt{\pi}\tau_D \,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\pi^2\tau_D^2\left(\mu^2 - \frac{i2\mu\tau}{\pi\tau_D^2}\right)\right]d\mu\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Re}\left\{e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2}\int_{-\infty-\frac{i\tau}{\tau_D^2}}^{\infty+\frac{i\tau}{\tau_D^2}} e^{-u^2}du\right\} = e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2},$$

unde s-a notat: $$\mu^2 - \frac{i2\pi\tau}{\pi\tau_D^2} = \left(\mu - \frac{i\tau}{\pi\tau_D^2}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\pi\tau_D^2}\right)^2,$$

$$u = \left(\mu - \frac{i\tau}{\pi\tau_D^2}\right)\pi\tau_D, \text{ deci: } du = \pi\tau_D d\mu,$$

respectiv: $\mu \to -\infty$, $u \to -\infty - \dfrac{i\tau}{\tau_D}$; $\mu \to +\infty$, $u \to +\infty - \dfrac{i\tau}{\tau_D}$.

Deci: $$\gamma(\tau) = e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2}\cos\omega_0\tau.$$

In fig. 16 a este prezentată dependenţa termenului oscilant de timpul de retardare. Infăşurătoarea $C(\tau) = e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2}$ este o funcţie lent-variabilă faţă de funcţia $\cos\omega_0\tau$, deoarece $\tau_D \gg \dfrac{1}{\nu_0}$. Dacă interferometrul Michelson este iluminat cu radiaţia unei surse care emite radiaţie caracterizată prin funcţia de distribuţie (3.2 9),

atunci există un interval finit al timpului de retardare $\tau = \frac{2d}{c}$ pentru care se poate observa fenomenul de interferenţă. Dacă timpul de retardare $\tau \langle\langle \tau_D$, atunci se poate aproxima $\exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2\right] \cong 1$, iar termenul oscilant devine: $\gamma(\tau) \cong \cos\omega_0\tau$, la fel ca în cazul radiaţiei armonice.

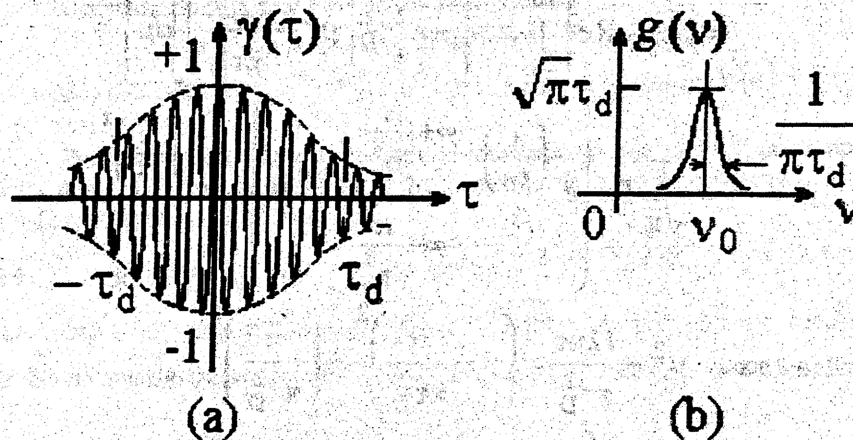


Fig. 16 a,b

Pentru a înregistra efectul lăţimii spectrale este necesar să se considere valori ale *timpului de retardare* comparabile cu valoarea τ_D, pentru care valoarea anvelopei $C(\tau)$ se reduce de e ori. Deoarece $\Delta\nu = \frac{2}{\pi\tau_D}$, există relaţia $\Delta\nu\tau_D \cong 1$, deci mărimea τ_D poate fi interpretată drept *timp de coerenţă*.

4. In cazul general densitatea de flux spectrală este descrisă de o *funcţie continuă* $\varphi(\nu)$, iar mărimea $\varphi(\nu)d\nu$ va reprezenta densitatea spectrală de flux corespunzătoare domeniului de frecvenţe $\nu \div \nu + d\nu$. Densitatea de flux la nivelul detectorului va fi $(x=1)$:

(3.2 11) $$\varphi_d(\tau) = \int_0^\infty \varphi(\nu)[1+\cos\omega\tau]d\nu =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\nu)d\nu + \int_0^\infty \varphi(\nu)\cos\omega\tau d\nu = \varphi_0[1+\gamma(\tau)]$$

unde:

(3.2 12) $$\gamma(\tau) = \int_0^\infty g(\nu)\cos\omega\tau d\nu,$$

reprezintă termenul oscilant normat, iar $g(\nu) = \frac{\varphi(\nu)}{\varphi_0}$ - funcţia normată a distribuţiei spectrală.

Relaţia (3.2 12) exprimă mărimea $\gamma(\tau)$ ca o transformată Fourier a funcţiei $g(\nu)$. Inregistrând termenul oscilant normat se poate obţine funcţia de distribuţie spectrală efectuând transformata Fourier inversă. Presupunând cunoscută funcţia $\gamma(\tau)$ pentru toate valorile pozitive ale variabilei τ, aceasta se înmulţeşte cu $\cos 2\pi\mu\tau$ şi se integrează în limitele $0 \div \infty$.

(3.2 13)
$$\int_{\tau=0}^\infty \gamma(\tau)\cos 2\pi\mu\tau d\tau = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\int_0^\infty g(\nu)\cos\omega\tau d\nu\right]\cos 2\pi\mu\tau d\tau =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^\infty g(\nu)\left[\int_0^T \cos\omega\tau\cos 2\pi\mu\tau d\tau\right]d\nu =,$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^\infty g(\nu)\left[\int_0^T \frac{1}{2}\cos 2\pi(\nu+\mu)\tau d\tau + \int_0^T \frac{1}{2}\cos 2\pi(\nu-\mu)\tau d\tau\right]d\nu$$

unde: $g(\mu) = 4\int_0^\infty \gamma(\tau)\cos 2\pi\mu\tau d\tau$ reprezintă *transformate Fourier inversă.*

Proprietăţile funcţiei $\gamma(\tau)$:

1 - Din relaţia (3.2 12) rezultă că pentru $\tau = 0$, $\gamma(0) = 1$. Deoarece $g(\nu)$ este o funcţie nenegativă, pentru $\tau \rangle 0$ se obţine: $|\gamma(\nu)|\langle 1$.

2 - Funcţia de distribuţie spectrală $g(\nu)$ reprezintă suprapunerea unor funcţii de distribuţie individuale normate $g_j(\nu)$:

$$g(\nu) = \sum_j C_j\, g_j(\nu),$$

unde: $\sum_j C_j = 1$. Termenul oscilant normat reprezintă suma termenilor oscilanţi normaţi corespunzători funcţiilor individuale $g_j(\nu)$:

$$\gamma(\tau) = \sum_j C_j\, \gamma_j(\nu)$$ (vezi cazul a două câmpuri armonice).

3.3 Funcţia de autocorelare.

Micşorarea amplitudinii termenului oscilant (3.2 12) al factorului $\gamma(\tau)$ este determinată de contribuţia la tabloul de interferenţă a undelor armonice cu frecvenţe diferite. Dispariţia figurii de interferenţă se manifestă atunci când timpul de retardare (τ) este comparabil cu inversul lăţimii spectrale $(\Delta\nu)$ a funcţiei de distribuţie a frecvenţelor $\left(\Delta\nu \cong \frac{1}{\tau}\right)$. Lipsa contrastului figurii de interferenţă reprezintă o proprietate generală a surselor reale de radiaţie optică şi apare atunci când poziţia valorii minime de interferenţă corespunzătoare unei frecvenţe date se suprapune peste poziţia valorii maxime ale altei frecvenţe.

Interpretarea funcţiei $\gamma(\tau)$. Dispariţia figurii de interferenţă, de ex. în interferometrul Michelson, poate fi de asemenea analizată considerând aspectele statistice ale dependenţei de timp ale semnalului de radiaţie optică. Componenta electrică a semnalului monocromatic poate fi scrisă sub forma:

(3.3 1) $$e(t) = E(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)],$$

în care dependenţa de timp a mărimilor $E(t)$ şi $\phi(t)$ poate fi descrisă numai considerând proprietăţile statistice ale câmpului radiaţiei optice.

Să considerăm fluctuaţia medie pătratică a fazei pe intervalul de timp Δt:

$$\left\langle \delta\phi(\Delta t)^2 \right\rangle = \left\langle [\phi(t+\Delta t) - \phi(t)]^2 \right\rangle = \left\langle [\phi(t) - \phi(t-\Delta t)]^2 \right\rangle.$$

Pentru simplificare să considerăm că media variaţiei fazei este egală cu zero, adică variaţiile pozitive sunt identice cu cele negative:

$$\langle \delta\phi(\Delta t) \rangle = \langle \phi(t+\Delta t) - \phi(t) \rangle = 0.$$

Să notăm cu τ_c valoarea intervalului de timp pentru care valoarea fluctuaţiei mediei pătratică a fazei este de ordinul $\left\langle \delta\phi(\tau_c)^2 \right\rangle = 1\,\text{rad}$. Dacă pentru iluminarea interferometrului Michelson se utilizează o asemenea sursă, atunci, pentru

$\tau = \frac{2d}{c} = \tau_c$, între cele două braţe apare o diferenţă de fază medie pătratică egală cu 1 rad, iar vizibilitatea figurii de interferenţă se va micşora.

Presupunem că divizorul de amplitudine este ideal, adică elongaţiile celor două câmpuri obţinute prin divizare sunt egale. Dacă $e(t)$ reprezintă semnalul la detector provenit de la oglinda O_1 (fig. 14), atunci $e(t-\tau)$ (semnalul la detector provenit de la oglinda O_2) reprezintă valoarea elongaţiei la un *moment anterior*. Densitatea spectrală de flux la nivelul detectorului este proporţională cu media în timp al pătratelor semnalului total:

(3.3 2)
$$\varphi_d = \left\langle [e(t) + e(t-\tau)]^2 \right\rangle = \left\langle e(t)^2 \right\rangle + \left\langle e(t-\tau)^2 \right\rangle + 2\langle e(t)e(t-\tau) \rangle,$$

unde valoarea medie se calculează conform relaţiei:

$$\left\langle e(t)^2 \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} e(t)^2 dt.$$

Valoarea intervalului timpului de mediere se consideră atât de mare încât rezultatul integrării nu depinde de momentul t_0 în jurul căruia este centrat intervalul de măsură, deci se poate considera $T \to \infty$.

Mărimile $\left\langle e(t)^2 \right\rangle$ şi $\left\langle e(t-\tau)^2 \right\rangle$ reprezintă densităţile spectrale de flux la nivelul detectorului care provin de la cele două braţe, fiind egale cu $\frac{\varphi_0}{2}$, dacă sursa de radiaţie este staţionară şi nepolarizată ($\varphi_0 = \left\langle e(t)^2 \right\rangle + \left\langle e(t-\tau)^2 \right\rangle$ - intensitatea totală la receptor, dacă fenomenul de interferenţă nu este prezent).

Termenul $2\langle e(t)e(t-\tau) \rangle$ reprezintă rezultatul efectului de interferenţă. Pentru a descrie cantitativ acest rezultat se defineşte mărimea normată:

(3.3 3) $$\gamma(\tau) = \frac{2\langle e(t)e(t-\tau) \rangle}{\left\langle e(t)^2 \right\rangle + \left\langle e(t-\tau)^2 \right\rangle} = \frac{\langle e(t)e(t-\tau) \rangle}{\left\langle e(t)^2 \right\rangle}.$$

In aceste condiţii relaţia (3.3 2) devine:

(3.3 4) $$\varphi_d = \varphi_0[1 + \gamma(\tau)],$$

iar $\gamma(\tau)$ reprezintă *funcţia de autocorelare a semnalului* $e(t)$. Această funcţie descrie corelarea mărimii $e(t)$ cu aceeaşi mărime definită la un moment anterior. Funcţia de

autocorelare este echivalentă cu termenul oscilant normat introdus în relația (3.2 12), deci:

(3.3 5) $$\gamma(\tau)=\frac{\langle e(t)e(t-\tau)\rangle}{\langle e(t)^2\rangle}=\int_0^\infty g(\nu)\cos\omega\tau d\nu .$$

Aceast rezultat este cunoscută sub denumirea de *teorema Wiener-Khintchine*: ***funcția de autocorelare normată a unui semnal reprezintă transformata Fourier a funcției de distribuție spectrală a semnalului.***

Dacă câmpul este reprezentat prin *semnal analitic* atunci funcția (3.3 1) are forma:

(3.3 6) $$e(t)=\mathrm{Re}\{E(t)\exp[i(\omega_0 t+\phi(t))]\},$$

iar forma funcției de autocorelare devine:

(3.3 7) $$\tilde{\gamma}(\tau)=\frac{\langle \tilde{e}(t)\tilde{e}(t-\tau)^*\rangle}{\langle |\tilde{e}(t)|^2\rangle},\ \text{unde: } \gamma(\tau)=\mathrm{Re}\,\tilde{\gamma}(\tau).$$

3.3.1 Funcția de autocorelare a radiației monocromatice

Funcția de distribuție spectrală a radiației monocromatice este centrată pe frecvența ν_0, are o lățime spectrală $\Delta\nu$, câmpul fiind descris de relația (3.3 1), iar termenul oscilant normat corespunzător este descris de relația (3.2 8).

$$\gamma(\tau)=C(\tau)\cos\omega_0\tau+S(\tau)\cos\omega_0\tau=U(\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)].$$

Să calculăm funcția de autocorelare pentru acest tip de radiație.

$$\langle e(t)e(t-\tau)\rangle=$$

$$=\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\omega_0 t+\phi(t)]\cos[\omega_0(t-\tau)+\phi(t-\tau)]\rangle=$$

$$=\left\langle E(t)E(t-\tau)\left\{\frac{1}{2}\cos[\omega_0(2t-\tau)+\phi(t)+\phi(t-\tau)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\cos[\omega_0\tau+\phi(t)-\phi(t-\tau)]\right\}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(t)-\phi(t-\tau)]\rangle$$

Deoarece: $\langle e(t)\rangle^2=\frac{\langle E(t)\rangle^2}{2}$, se obține:

(3.3 8) $$\gamma(\tau)=\frac{\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(t)-\phi(t-\tau)]\rangle}{\langle E(t)^2\rangle}.$$

Mărimea $\gamma(\tau)$ depinde de diferența fazelor $[\phi(t)-\phi(t-\tau)]$. Dacă valoarea timpului de retardare este mică, atunci fluctuația fazei este mică, ceea ce implică o fluctuație mică a amplitudinii $(E(t-\tau)\cong E(t))$. In aceste condiții se obține valoarea descrisă de relația (3.2 2) ($\gamma(\tau)=\cos\omega_0\tau$) a factorului oscilant normat caracteristic radiației armonice.

Dacă valoarea fluctuației medii pătratice a fazei este de ordinul unui radian, factorul *cos* va prezenta fluctuații mari, media lui va fi mult mai mică decât valoarea $\cos\omega_0\tau$, iar vizibilitatea tabloului de interferență se va micșora.

Dacă în relația (3.3 8) se dezvoltă funcția *cos* se obține:

$$\gamma(\tau)=\frac{\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\phi(t)-\phi(t-\tau)]\rangle}{\langle E(t)^2\rangle}\cos\omega_0\tau-$$

(3.3 9) $$-\frac{\langle E(t)E(t-\tau)\sin[\phi(t)-\phi(t-\tau)]\rangle}{\langle E(t)^2\rangle}\sin\omega_0\tau=$$

$$=C(\tau)\cos\omega_0\tau+S(\tau)\sin\omega_0\tau=U(\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]$$

Dacă se utilizează expresia analitică a semnalului, atunci forma funcției de autocorelare este:

(3.3 10) $$\gamma(\tau)=\frac{e^{i\omega_0\tau}\langle E(t)E(t-\tau)e^{i[\phi(t)-\phi(t-\tau)]}\rangle}{\langle E(t)^2\rangle}=U(\tau)e^{i[\omega_0 t+\phi(\tau)]},$$

unde s-a notat:

$$\frac{\langle E(t)E(t-\tau)e^{i[\phi(t)-\phi(t-\tau)]}\rangle}{\langle E(t)^2\rangle}=U(\tau)e^{i\phi(t)}.$$

Partea reală a relației (3.3 10) conduce la expresia mărimii $\gamma(\tau)$.

Deci pentru a cunoaște funcția de autocorelare este necesar să avem informații despre funcțiile $E(t)$ și $\phi(t)$. De ex. în cazul semnalului radio sau a celui obținut de la un laser *mono*modal, valoarea amplitudinii E este constantă, iar mărimile γ, C, S și U vor depinde numai de fluctuația fazei, adică vor fi de forma:

$C(\tau)=\langle\cos[\phi(t)-\phi(t-\tau)]\rangle$, respectiv: $S(\tau)=\langle\sin[\phi(t)-\phi(t-\tau)]\rangle$.

3.3.2 Funcția de autocorelare pentru radiația termică.

Semnalele generate de dipolii electrici (oscilatorii) individuali care contribuie la formarea radiației termice sunt independente între ele, iar interferometrul Michelson nu poate detecta interferența surselor individuale; prin urmare tabloul de interferență reprezintă suprapunerea tablourilor individuale, adică semnalul generat de fiecare dipol electric interferă cu el însuși.

Deoarece forma semnalul real este:

(3.3 11) $$e(t) = \sum_{j=1}^{N} e_j(t) = \sum_{j=1}^{N} E_j(t)\cos[\omega_0 t + \phi_j(t)],$$

cea a funcției de autocorelare va fi:

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle e(t)e(t-\tau)\rangle}{\langle e(t)^2\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)e(t-\tau)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)^2 dt} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau)E_k(t)\cos[\omega_0(t-\tau)+\phi_j(t-\tau)]\cos[\omega_0 t + \phi_k(t)]dt}{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)\cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)]dt}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)\cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)]} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau)E_k(t)\left\{\frac{1}{2}\cos[\omega_0\tau + \phi_k(t) - \phi_j(t-\tau)] + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\cos[\omega_0(2t-\tau) + \phi_k(t) + \phi_j(t-\tau)]\right\}dt =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau)E_k(t)\cos[\omega_0\tau + \phi_k(\tau) - \phi_j(t-\tau)]dt}{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)\cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)]dt}.$$

Deoarece oscilatorii sunt independenți, pentru fiecare pereche cu o valoare dată a mărimii $\cos[\omega_0 t + \phi_k(t) - \phi_j(t-\tau)]$, va exista o altă pereche pentru care mărimea $\cos[\omega_0 t + \phi_j(t) - \phi_k(t-\tau)]$ va avea semn opus, deci rezultatul medierii va fi zero, iar suma se va extinde numai asupra termenilor $j = k$.

(3.3 12) $$\gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}E_j(t-\tau)E_k(t)\cos[\omega_0\tau + \phi_j(t) - \phi_j(t-\tau)]dt}{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)\cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)]dt}.$$

Din expresia (3.3 8) a funcției de autocorelare pentru un oscilator j:

$$\gamma_j(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau)E_j(t)\cos[\omega_0\tau + \phi_j(t) - \phi_j(t-\tau)]dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)\cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)]dt}$$

se obține:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau)E_j(t)\cos[\omega_0\tau + \phi_j(t) - \phi_j(t-\tau)]dt = \gamma_j(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)dt.$$

iar relația (3.3 12) devine:

(3.3 13) $$\gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{N}\gamma_j(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)dt}{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)dt}.$$

Această relaţie reprezintă media ponderată a funcţiilor de autocorelare individuale, unde factorul de ponderare: $\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t)dt$ este proporţional cu energia totală emisă de oscilatorul j. Dacă oscilatorii individuali sunt identici, fiecare fiind caracterizat prin acelaşi factor $\gamma_j(\tau)$, atunci:

(3.3 14) $$\gamma(\tau) = \gamma_j(\tau),$$

adică funcţia de autocorelare macroscopică, care reprezintă partea oscilatorie normată a tabloului de interferenţă (parte ce poate fi măsurată direct), reprezintă funcţia de autocorelare a câmpului radiat de oscilatorul microscopic individual.

Rezultatul descris de relaţia (3.3 13) este valabil pentru orice sursă termică.

3.3.2.1 Funcţia de autocorelare şi cea de distribuţie spectrală pentru câteva modele de surse termice.

Aceste rezultate sunt folosite pentru a calcula, pentru modele simple de sisteme ce radiază, *funcţia de autocorelare* $\gamma_j(\tau)$, *funcţia de autocorelare totală* şi *funcţia de distribuţie spectrală*. Pentru simplificare presupunem că faza (ϕ_j) a semnalului monocromatic este constantă, deci fluctuaţiile amplitudinii (E_j) acţionează ca o înfăşurătoare care modulează oscilaţiile rapide ale factorului *cos*. Prin urmare relaţia (3.3 8) se poate scrie sub forma:

(3.3 15)
$$\gamma(\tau) = \gamma_j(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)]\rangle}{\langle E(t)^2\rangle} =$$
$$= \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\rangle}{\langle E(t)^2\rangle}\cos\omega_0\tau = \gamma_E(\tau)\cos\omega_0\tau$$

unde factorul $\cos\omega_0 t$, caracteristic funcţiei armonice, este modulat de funcţia de autocorelare a semnalului $E(t)$.

Dacă mărimea este considerată constantă, conform relaţiei (3.3 9), se obţine:

(3.3 16 a)
$$C(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\phi(t) - \phi(t-\tau)]\rangle}{\langle E(t)^2\rangle} = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\rangle}{\langle E(t)^2\rangle} = \gamma_E(\tau),$$

(3.3 16 b) $$-S(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\sin[\phi(t) - \phi(t-\tau)]\rangle}{\langle E(t)^2\rangle} = 0,$$

unde: $$C(\tau) = \gamma_E(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(\mu)\cos 2\pi\mu\tau d\mu,$$

iar funcţia de distribuţie spectrală este:

(3.3 17)
$$g(\nu) = D(\nu - \nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau)\cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau]d\tau =$$
$$= 2\int_{0}^{+\infty} C(\tau)\cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau]d\tau$$

1. - *Lăţimea radiativă a tranziţiei*. In timpul procesului de emisie, dipolul electric excitat, dar neperturbat, radiază o undă periodică care prezintă o înfăşurătoare exponenţială:

$$e(t) = E\,e^{-\frac{t}{T_1}}\cos(\omega_0 t + \phi), \text{ pentru: } t \geq 0$$
$$e(t) = 0, \text{ pentru: } t\langle 0,$$

unde T_1 reprezintă timpul de viaţă radiativ (timpul de relaxare).

Funcţia de autocorelare se obţine prin corelarea a două unde amortizate, retardate una faţă de alta cu intervalul de timp τ (fig. 17 a):

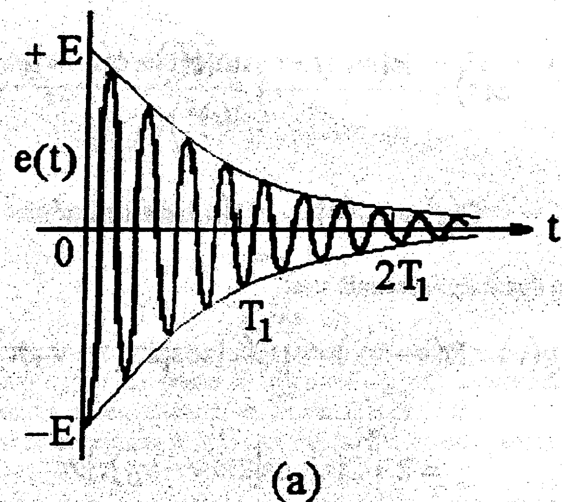
$$\gamma_E(\tau) = \frac{E^2\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} dt}{E^2\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt} = \frac{e^{\frac{\tau}{T_1}}\left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt - \int_0^{\tau} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt\right]}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt} = e^{-\frac{|\tau|}{T_1}},$$

unde integrala este definită pe domeniul $\tau \div \infty$, iar mărimea τ este numai pozitivă.

Prin urmare:

(3.3 19) $$\gamma(\tau) = \gamma_E(\tau)\cos\omega_0 = e^{-\frac{|\tau|}{T_1}}\cos\omega_0 t \text{ (fig. 17 b).}$$

Funcţia de distribuţie spectrală ce caracterizează acest ansamblu de dipoli electrici, este dată de relaţia:



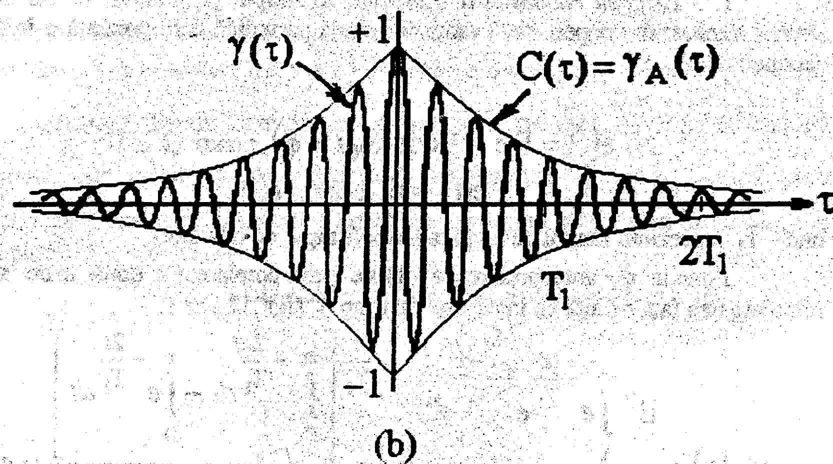


Fig. 17 a,b

$$g(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau)\cos 2\pi(\nu-\nu_0)\tau\, d\tau =$$

(3.3 20)
$$=\mathrm{Re}\left\{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T_1}} e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\tau}{T_1}} e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)\tau} d\tau\right\} =$$

$$=\frac{\frac{2}{T_1}}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{1}{T_1}\right)^2},$$

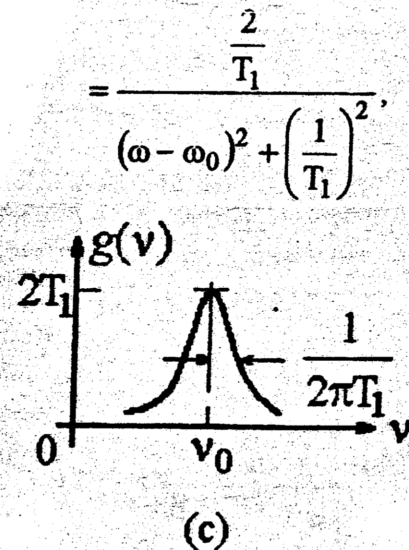


Fig. 17 c

unde $T_1 \rangle\rangle T_2$, deci lățimea este mult mai mică decât cea obținută în prezența ciocnirilor. Funcția de distribuție spectrală este prezentată în fig. 17 c.

2. - *Cazul pulsului dreptunghiular* (semnal sinusoidal limitat într-un interval de timp dat). Funcția $E(t-\tau)$ reprezintă funcția $E(t)$ (fig. 18 a,b) deplasată cu intervalul de timp τ (fig. 18 c). Mărimea $\langle E(t)E(t-\tau)\rangle$ este proporțională cu aria hașurată: $(2t_1-\tau)E_0^2$ pentru $\tau \le 2t_1$.

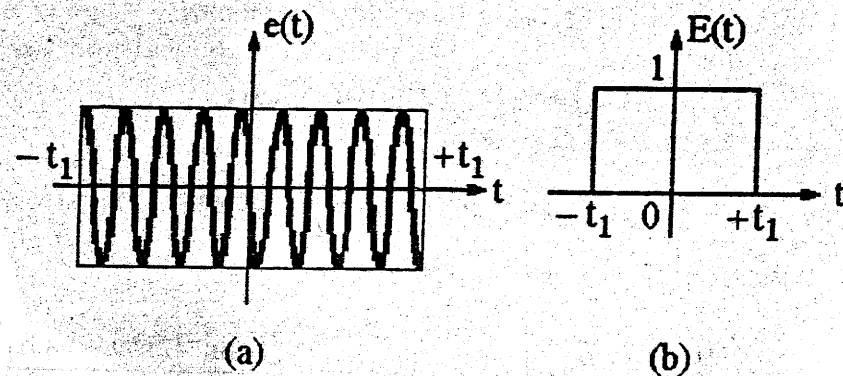


Fig. 18 a,b

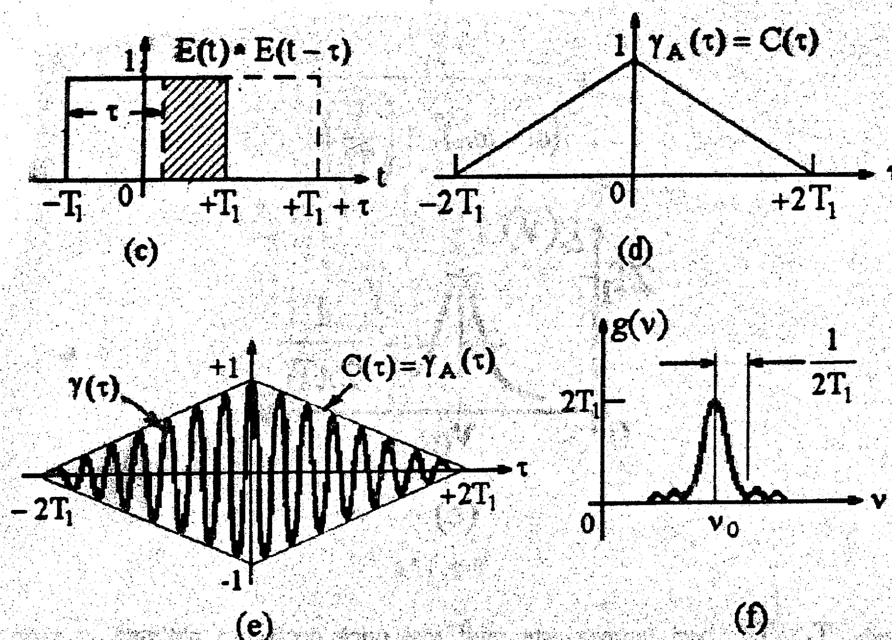


Fig. 18 c,d,e,f

In fig. 18 d este prezentată funcția $C(\tau)$:

$$C(\tau)=\gamma_E(\tau)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)E(t-\tau)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)^2dt}=\frac{(2t_1-\tau)E_0^2}{2t_1E_0^2}=1-\frac{|\tau|}{2t_1}, \text{ pt. } |\tau|\le 2t_1$$

$$C(\tau)=\gamma_E(\tau)=0, \text{ pentru: } |\tau|>2t_1,$$

iar în fig. 18 e funcția totală de autocorelație:

(3.3 21)
$$\gamma(\tau)=\gamma_E(\tau)\cos\omega_0=\left(1-\frac{|\tau|}{2t_1}\right)\cos\omega_0\tau,$$

Funcția de distribuție spectrală dată de relația:

(3.3 22)
$$g(\nu)=2\int_0^{2t_1}\left(1-\frac{\tau}{2t_1}\right)\cos[2\pi(\nu-\nu_0)\tau]d\tau=\frac{2t_1\sin^2[2\pi(\nu-\nu_0)t_1]}{[2\pi(\nu-\nu_0)t_1]^2},$$

care coincide cu funcția descrisă de relația (I 7.7), este prezentată grafic în fig. 18 f.

3. - *Lărgirea determinată de procesul de ciocniri.* Acest proces poate fi modelat în modul următor. Procesul de emisie al dipolului electric este perturbat de ciocnirea cu alt dipol, după care se continuă fără a prezenta corelare de fază cu cel anterior ciocnirii. Pe intervalul de timp cuprins între două ciocniri, semnalul poate fi considerat dreptunghiular (fig. 18 a). Dacă $t_c = 2t_1$ reprezintă intervalul de timp dintre două ciocniri, funcția de autocorelare a câmpului *em* între două ciocniri va fi:

$$\gamma(t_c,\tau)=C(t_c,\tau)\cos\omega_0\tau, \text{ unde:}$$

$$C(t_c,\tau)=\left(1-\frac{|\tau|}{t_c}\right), \text{ pentru: } t_c\ge|\tau|,$$

$$C(t_c,\tau)=0, \qquad \text{pentru: } t_c<|\tau|$$

iar funcția de autocorelare totală este dată de relația (3.3 13):

$$\gamma(\tau)=\frac{\sum_{j=1}^{N}\gamma_j(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}E_j^2(t)dt}{\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}E_j^2(t)dt}.$$

Dacă considerăm că toate semnalele fragmentate au aceeași amplitudine $E_j(t)=ct$, factorul de ponderare poate fi scris sub forma:

$$\langle E_j^2(t')\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}E_j^2(t)dt'=E_j^2t_c.$$

Sumarea după j se poate înlocui cu integrala după t_c (trebuie înmulțit cu probabilitatea de ciocnire a dipolului și intervalul de timp dat):

$$\sum_j E_j^2t_c\to\int_{-\infty}^{+\infty}t_cE_j^2P(t_c)dt_c,$$

unde $P(t_c)dt_c$ reprezintă probabilitatea de ciocnire a dipolului în intervalul $t_c\div t_c+dt_c$.

Să considerăm că la momentul $t=0$ ansamblul conține $n(0)$ dipoli electrici, iar la momentul t_c au rămas neciocniți $n(t_c)$ dipoli. In intervalul $t_c\div t_c+dt_c$ vor fi ciocniți Δn dipoli, dat de relația:

$$d\,n(t_c) = k_c n(t_c) d t_c = -n(t_c)\frac{d t_c}{T_2}, \text{ unde:}$$

T_2 - timpul mediu de ciocnire sau timpul mediu de defazare, iar k_c - frecvenţa ciocnirilor. Semnul "–" arată că numărul dipolilor neciocniţi scade cu creşterea timpului. Din această relaţie rezultă:

$$\int_{n(0)}^{n(t_c)} \frac{d\,n(t_c)}{n(t_c)} = -\int_{n(0)}^{n(t_c)} \frac{d t_c}{T_2}, \text{ de unde: } n(t_c) = n(0) e^{-\frac{t_c}{T_2}},$$

adică numărul de dipoli neciocniţi scade exponenţial cu timpul. Ceilalţi dipoli, în intervalul de timp t_c au suferit una sau mai multe ciocniri. Prin urmare după intervalul de timp t_c, probabilitatea ca un dipol electric să nu sufere nici o ciocnire este egală cu $e^{-\frac{t_c}{T_2}}$, iar probabilitatea ca în intervalul $d t_c$ acesta să fie supus unei ciocniri este:

$$P(t_c) = -\frac{1}{n(0)}\frac{d\,n(t)}{d t_c} = -\frac{1}{n(0)}\left[-\frac{n(t_c)}{T_2}\right] = \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t_c}{T_2}}$$

$$P(t_c) d t_c = \frac{d t_c}{T_2} e^{-\frac{t_c}{T_2}},$$

unde timpul mediu dintre două ciocniri este:

$$T_2 = \int_0^{\infty} t_c P(t_c) d t_c.$$

Considerând că toţi dipolii electrici emit cu aceeaşi amplitudine iar suma poate fi transformată în integrală, funcţia de autocorelare totală devine:

$$\gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t_c) d t_c\right] C_j(\tau)\cos\omega_0\tau}{\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t_c) d t_c\right]} =$$

$$= \frac{\cos\omega_0\tau\left[E_j^2 C_j(\tau)\int_0^{+\infty} t_c P(t_c) d t_c\right]}{E_j^2 \int_0^{+\infty} t_c P(t_c) d t_c} = C_j(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

Dar: $$C(\tau) = \int_{\tau}^{\infty}\left(1 - \frac{\tau}{t_c}\right)\frac{t_c}{T_2} e^{-\frac{t_c}{T_2}}\frac{d t_c}{T_2} = e^{-\frac{\tau}{T_2}}.$$

Deci:

(3.3 23) $$\gamma(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{T_2}}\cos\omega_0\tau = \mathrm{Re}\left[e^{-\frac{|\tau|}{T_2}}\frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{2}\right].$$

Expresia funcţieia de distribuţie spectrală este:

(3.3 24) $$g(\omega) = D(\nu - \nu_0) = D(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau)\cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{T_2}} e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\tau}{T_2}} e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{T_2} + i2\pi\mu} + \frac{1}{\frac{1}{T_2} - i2\pi\mu} = \frac{\frac{2}{T_2}}{(2\pi\mu)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2} = \frac{\frac{2}{T_2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

In această relaţie $T_2 = \frac{\lambda}{\bar{v}} = \frac{kT}{\sigma p}\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}$, unde $\lambda = \frac{1}{\sigma n}$, λ - drumul liber mediu, σ - secţiunea eficace de ciocnire, $n = \frac{p}{kT}$ - numărul de dipoli din unitate de volum, iar $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

Mărimea $g(\nu)$ reprezintă o funcție Lorentz normată. Se observă că $g(\omega_0)=2T_2$, iar semilățimea este: $\Delta\nu=\frac{1}{2\pi T_2}$

4. *Lărgirea Doppler.* O cauză importantă a lărgirii spectrale a semnalului emis de către un ansamblu de dipoli electrici aflați în mișcare la echilibru termodinamic este efectul Doppler. Frecvența radiației monocromatice emisă de către aceștia, față de sistemul de referință legat de dipol, este egală cu ν_0. Dacă dipolul se deplasează față de observator cu viteza v, acesta observă frecvența:

$$\nu=\nu_0\left(1+\frac{v}{c}\right),\ \text{de unde: } v=\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}c.$$

La echilibru termodinamic, vitezele se supun legii de distribuție a lui Maxwell:

$$P(v)dv=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv,\ \text{unde: } \left\langle v^2\right\rangle=\frac{3kT}{m},$$

corespunzător, funcția de distribuție spectrală determinată de dependența frecvenței de viteza de deplasare a dipolului este:

(3.3 25)
$$g(\nu)d\nu=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}e^{-\frac{m(\nu-\nu_0)^2c^2}{2kT\nu_0^2}}\frac{c}{\nu_0}d\nu=$$
$$=\frac{\tau_D\sqrt{\pi}\nu_0}{c}\frac{c}{\nu_0}e^{-\pi^2\tau_D^2(\nu-\nu_0)^2}d\nu=\tau_D\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\tau_D^2(\nu-\nu_0)^2}d\nu,$$

unde: $\tau_D =$

Acest contur este de tip Gauss, centrat pe frecvența ν_0 și are lățimea:

$$\frac{g(\nu_0)}{e}=\frac{\sqrt{\pi}\tau_D}{e}=\frac{\sqrt{\pi}\tau_D}{e^{\pi^2(\nu_1-\nu_0)^2\tau_D^2}},\ \text{de unde: } \nu_1-\nu_0=\pm\frac{1}{\pi\tau_D}.$$

Funcția de autocorelație este dată de relația:

(3.3 26)
$$\gamma(\tau)=C(\tau)\cos\omega_0=\tau e^{-\frac{\tau^2}{\tau_D^2}}\cos\omega_0\tau.$$

Funcția $g(\nu)$ reprezintă transformata Fourier a funcției $\gamma(\tau)$, deci trebuie efectuată transformata Fourier a funcției $C(\tau)=e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2}$

$$\hat{C}(\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2}e^{-2\pi i\mu\tau}d\tau=\sqrt{\pi}\tau_D e^{-\pi^2\mu^2\tau_D^2},\ \text{deci:}$$

$$P(\mu)=C(\nu-\nu_0).$$

Rezultate obținute în cele trei cazuri au un element comun: atât lărgimea determinată de timpul mediu de viață (T_1) cât și cea determinată de procesul de ciocniri (T_2) reprezintă o măsură a timpului de coerență τ_c. Lățimea funcției de distribuție spectrală monocromatică este de ordinul mărimii $1/\tau_c$. Lățirea Doppler se comportă la fel, deși timpul individual de emisie a dipolului este mult mai mare decât τ_D. Deci se poate accepta ideea că lățimea domeniului spectral este corelată cu valoarea timpului de coerență: $\Delta\nu\cong\frac{1}{\tau_c}$. In general se introduce un interval de timp $\tau_c\approx t_d$, care reprezintă o măsură a domeniului temporal pentru care $\gamma(\tau)\neq 0$.

3.3.3 Definirea timpului de coerență și lățimea spectrală.

Pe baza celor prezentate se poate defini timpul de coerență τ_c, caracteristic unui semnal cvazimonocromatic, și lățimea spectrală corespunzătoare $\Delta\nu$. Pentru definirea acestor mărimi există mai multe posibilități, dar considerăm definițiile introdusă de către Mandel, prin relațiile:

(3.3 27) a) $\tau_c=4\int_0^\infty\gamma(\tau)^2d\tau$, respectiv: b) $\Delta\nu=\frac{1}{\int_0^\infty g(\nu)^2d\nu}$.

De ex., în cazul radiației monocromatice, dacă mărimile U, ϕ, C și S variază foarte încet în intervalul de timp τ, considerând relația (3.2 8), se obține:

$$\tau_c=4\int_0^\infty\left[U(\tau)\cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]\right]^2d\tau=$$
$$=4\int_0^\infty\left[C(\tau)\cos\omega_0\tau+S(\tau)\sin\omega_0\tau\right]^2d\tau=$$

$$= 4\int_0^\infty C(\tau)^2 \cos^2 \omega_0 \tau d\tau + 4\int_0^\infty S(\tau)^2 \sin^2 \omega_0 \tau d\tau +$$

$$+ 4\int_0^\infty [C(\tau)S(\tau)\cos\omega_0\tau \sin\omega_0\tau]d\tau = 2\int_0^\infty [C(\tau)^2 + S(\tau)^2]d\tau$$

Dacă se fac calculele se obţin rezultatele anterioare pentru timpul de coerenţă, respectiv lăţimea spectrală a semnalului.

3.4 Coerenţa transversală.

In acest paragraf va fi analizată corelarea valorii câmpului electric în două puncte diferite ale acestuia. Răspunsul la această problemă este dat de teoria *coerenţei parţiale*.

Timpul de coerenţă τ_c poate fi interpretat ca o măsură a intervalului de timp în care faza fasciculului monocromatic reţine în "memorie" valoarea pe care a avut-o la un moment anterior. Pentru a analiza această mărime este necesar ca într-un punct al câmpului în care urmează să se evalueze valoarea timpului de coerenţă, valoarea câmpului să fie divizată în două părţi, care sunt trimise pe drumuri diferite într-un alt punct, unde să interfere. Lungimea unui drum, faţă de cea a celuilalt poate fi variată, ceea ce corespunde introducerii unui timp de retardare. Se consideră că valoarea fazei rămâne corelată pe intervalul:

$$l_{long.} = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu},$$

numită *lungimea coerenţei longitudinale*.

Intr-un plan perpendicular la direcţia de propagare a unui fascicul de raze paralele, faza câmpului are aceeaşi valoare în orice punct al planului. Pentru a caracteriza din acest punct de vedere corelarea câmpurilor se introduce noţiunea de *coerenţă transversală (lungime de coerenţă transversală* - (l_t)) ca fiind distanţa, într-un plan perpendicular la direcţia de propagare, pentru care faza între două puncte rămâne corelată; fazele individuale pot prezenta fluctuaţii, dar fluctuează simultan cu aceeaşi valoare. Din acest punct de vedere se acceptă că în planul perpendicular la fasciculul colimat coerenţa transversală este perfectă. Pentru un fascicul necolimat, coerenţa transversală nu mai este perfectă. Dacă cele două puncte sunt separate printr-o distanţă mai mică de (l_t), atunci între ele există o corelare de fază bine definită, deci se poate observa *efectul de interferenţă*.

Stabilirea lungimii de coerenţă longitudinală, respectiv transversală se poate realiza prin două tipuri de experimente.

1. Un tip de măsurători, care permite stabilirea lungimii de coerenţă longitudinală, pot fi efectuate folosind o schemă bazată pe cea a interferometrului Michelson. In acest dispozitiv, obţinerea celor două fascicule, care ulterior sunt supuse interferenţei, se realizează cu ajutorul unei oglinzi *semi*transparente. Deoarece oglinda

acţionează într-un punct dat al câmpului, aceasta este cunoscută sub denumirea de *"divizor de amplitudine"*. Deplasarea unei oglinzi din cele două braţe ale interferometrului permite introducerea unui timp de retardare.

2. Al doilea tip de măsurători se bazează pe folosirea unui experiment de tip Young. In acest caz din câmpul de radiaţie optică supus analizei, folosind un ecran cu două fante, se selectează două surse, care pot fi considerate că emit două fascicule care urmează să interfere. Se pot realiza condiţii experimentale astfel încât să se considere că cele două fante selectează radiaţie din acelaşi front de undă. De aceea sistemul este cunoscut sub denumirea de *"divizor de front de undă"*. Acest sistem, prin modificarea distanţei dintre cele două fante, permite selectarea unor câmpuri situate pe frontul de undă la distanţe diferite. Acest tip de măsurători dau informaţii asupra "coerenţei transversale". Dacă pentru o distanţă dată între fante, punctul în care se măsoară rezultatul interferenţei se deplasează pe o direcţie perpendiculară la mediatoarea segmentului care uneşte cele două fante se pot afla informaţii despre "coerenţa longitudinala" a câmpurilor selectate de cele două fante (funcţie de distanţa dintre punctele câmpului).

Experimentul lui Young. In acest experiment să considerăm o sursă de radiaţie punctiformă care emite unde armonice cu frecvenţa ν şi să urmărim modificările tabloului de interferenţă dacă aceasta este deplasată. Franja de ordin zero se formează în punctul în care este îndeplinită condiţia:

$$SS_1P_0 = SS_2P_0.$$

(Deoarece punctul S se află pe mediatoarea segmentului S_1S_2, punctul P_0 se va afla pe aceeaşi mediatoare). Distanţa dintre franjele de interferenţă este dată de relaţia:

$$i = \frac{\lambda D}{h}, \text{ de unde: } \delta\theta' = \frac{i}{D} = \frac{\lambda}{h}.$$

(Deschiderea unghiulară sub care se vede o interfranjă din planul "divizorului de front de undă")

Să deplasăm sursa în punctul S', dispus în planul perpendicular la direcţia SP_0, în punctul S, astfel încât să formeze unghiul θ cu mediatoarea. Dacă θ şi θ' sunt unghiuri mici ($h\langle\langle SO, OP_0$), franja de ordin zero, respectiv întreg tabloul de interferenţă, se va deplasa cu unghiul $\theta' = \theta$. (In experimentul Young, pentru a observa tabloul de interferenţă, este necesar ca la nivelul fantei, fasciculul să fie împrăştiat prin fenomenul de difracţiei. Dacă lăţimea fantei este egală cu w, densitatea de flux scade la zero pentru direcţiile: $\theta' = \theta \pm \frac{\lambda}{w}$. Dacă $h\langle\langle w$, unghiul de difracţie acoperă mai multe franje de interferenţă $\left(\delta\theta' = \frac{\lambda}{h}\right)$.

Franjele de interferenţă sunt perpendiculare la planul fig. 19 a,b, deci sunt perpendiculare şi pe segmentul S_1S_2. Dacă sursa S se deplasează în afara planului,

atunci punctul P_0 (franja de ordin zero) se deplasează spre interior, dar tabloul rămâne neschimbat. Aceeaşi comportare se întâmplă şi dacă sursa S' se deplasează în acelaşi mod. Prin urmare, o distribuţie *tri*dimensională a punctelor sursei este echivalentă cu o distribuţie *bi*dimensională obţinută prin proiectarea distribuţiei originale în planul schiţei.

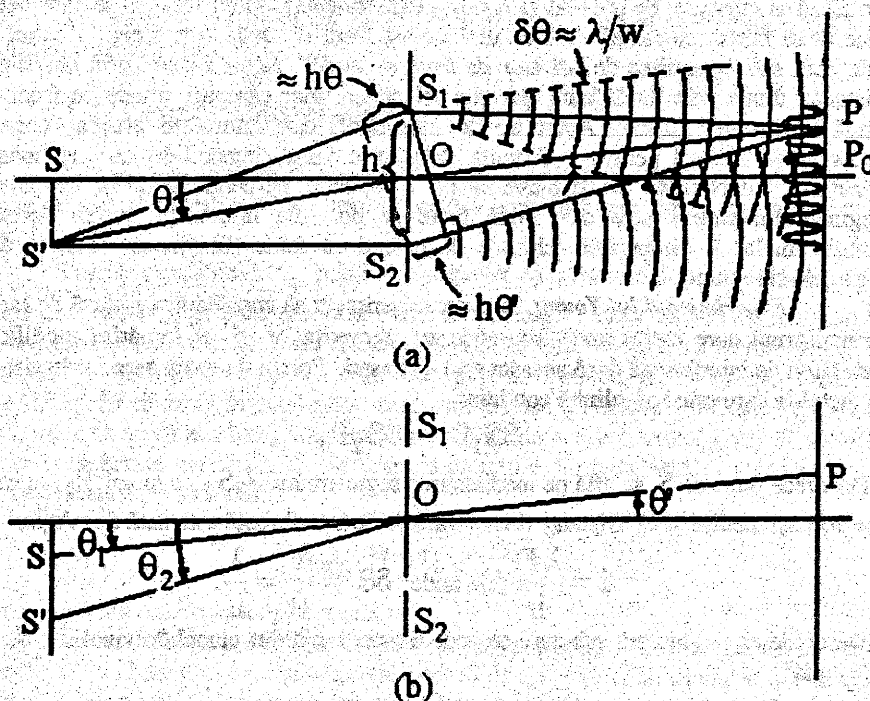


Fig. 19 a,b

Dacă în punctele S şi S' se consideră *două surse punctiforme* necorelate între ele, atunci contrastul tabloului de interferenţă va depinde de intensitatea surselor şi de unghiul θ. Dacă intensităţile sunt egale, vizibilitatea dispare dacă deplasarea este egală cu un număr impar de $\lambda/2$.

Pentru o singură sursă S', condiţia de franjă zero este dată de relaţia:

$$S'S_2P - S'S_1P = h(\theta' - \theta),$$

iar ca interval de timp: $\overline{\tau} = \dfrac{h(\theta' - \theta)}{c}$.

Dacă câmpul emis de sursa de radiaţia este caracterizat prin $\tau_c \rangle\rangle \overline{\tau}$, intensitatea în tabloul de interferenţă va fi dată de relaţia:

(3.4 1)
$$\varphi = \varphi_1' + \varphi_2' + 2\sqrt{\varphi_1'\varphi_2'}\cos\omega\overline{\tau} = \varphi_1'(1+\cos\omega\overline{\tau}) = = \varphi'\left\{1+\cos\left[\frac{\omega h(\theta'-\theta)}{c}\right]\right\}$$

unde, dacă ar fi deschisă o singură fantă: $\varphi_1' = \varphi_2' = \dfrac{\varphi_1}{2}$.

Să considerăm că radiaţia optică incidentă pe "divizorul de front de undă" este emisă de două surse punctiforme necorelate între ele, localizate într-un plan perpendicular la axa optică şi dispuse sub unghiurile θ_1 şi θ_2 faţă de aceasta. Intr-un punct al figurii de interferenţă, localizat faţă de axa optică sub unghiul θ', intensitatea este dată de relaţia:

(3.4 2)
$$\varphi = \varphi_1\left\{1+\cos\left[\frac{\omega h(\theta'-\theta_1)}{c}\right]\right\} + \varphi_2\left\{1+\cos\left[\frac{\omega h(\theta'-\theta_2)}{c}\right]\right\}.$$

Tabloul de interferenţă total rezultă din suprapunerea celor două tablouri de interferenţă. Vizibilitatea tabloului de interferenţă va fi minimă, dacă maximul de interferenţă al unui tablou coincide cu minimul celuilalt:

$$\frac{\omega h(\theta_1-\theta_2)}{c} = (2k+1)\pi, \text{ sau:}$$

$$\frac{h(\theta_1-\theta_2)}{\lambda} = \frac{2k+1}{2} \text{ (număr impar de } \lambda/2\text{)},$$

iar vizibilitatea va fi maximă dacă:

$$\frac{\omega h(\theta_1-\theta_2)}{c} = 2k\pi, \text{ sau: } \frac{h(\theta_1-\theta_2)}{\lambda} = k$$

Vizibilitatea tabloului de interferenţă determinată de două surse. Vizibilitatea figurii de interferenţă este dată de relaţia:

$$V = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{min}}{\varphi_{max} + \varphi_{min}}.$$

Din relaţia (3.4 2) rezultă:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 +$$

$$\varphi_1\left(\cos\frac{\omega h\theta'}{c}\cos\frac{\omega h\theta_1}{c} + \sin\frac{\omega h\theta'}{c}\sin\frac{\omega h\theta_1}{c}\right) +$$

$$+\varphi_2\left(\cos\frac{\omega h\theta'}{c}\cos\frac{\omega h\theta_2}{c} + \sin\frac{\omega h\theta'}{c}\sin\frac{\omega h\theta_2}{c}\right) =$$

(3.4 3)

$$= \varphi_1 + \varphi_2 + \left(\varphi_1 \cos\left[\frac{\omega h \theta_1}{c}\right] + \varphi_2 \cos\left[\frac{\omega h \theta_2}{c}\right]\right)\cos\left[\frac{\omega h \theta'}{c}\right] +$$

$$\left(\varphi_1 \sin\frac{\omega h \theta_1}{c} + \varphi_2 \sin\frac{\omega h \theta_2}{c}\right)\sin\frac{\omega h \theta'}{c} =$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0 \cos\alpha \cos\frac{\omega h \theta'}{c} + \varphi_0 \sin\alpha \sin\frac{\omega h \theta'}{c} =$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0 \cos\left(\alpha - \frac{\omega h \theta'}{c}\right)$$

unde valoarea mărimii φ_0 se obține pe baza relațiilor:

$$\varphi_0 \cos\alpha = \varphi_1 \cos\frac{\omega h \theta_1}{c} + \varphi_2 \cos\frac{\omega h \theta_2}{c}$$

$$\varphi_0 \sin\alpha = \varphi_1 \sin\frac{\omega h \theta_1}{c} + \varphi_2 \sin\frac{\omega h \theta_2}{c}$$

de unde:

$$\varphi_0^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 +$$

(3.4 4) $$+ 2\varphi_1\varphi_2\left[\cos\frac{\omega h \theta_1}{c}\cos\frac{\omega h \theta_2}{c} + \sin\frac{\omega h \theta_1}{c}\sin\frac{\omega h \theta_2}{c}\right] =$$

$$= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2 \cos\frac{\omega h(\theta_2 - \theta_1)}{c}.$$

Deoarece mărimea φ_0 depinde de parametrul h, mărimea V va depinde de asemena de distanța dintre fante. Expresia vizibilității este:

(3.4 5) $$V(h, \theta') = \frac{\varphi_0}{\varphi_1 + \varphi_2}.$$

Dacă variază unghiul θ', valorile extreme ale vizibilității tabloului de interferență sunt:

$V_{max} = 1$, dacă: $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$, adică:

$$\frac{\omega h(\theta_1 - \theta_2)}{c} = 2k\pi, \text{ sau: } \frac{h(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = k$$

$$V_{min} = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{\varphi_1 + \varphi_2}, \text{ dacă: } \varphi_0^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2, \text{ adică:}$$

$$\frac{\omega h(\theta_1 - \theta_2)}{c} = (2k+1)\pi, \text{ sau: } \frac{h(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = \frac{2k+1}{2}.$$

Din aceste relații rezultă că pentru două surse punctiforme vizibilitatea figurii de interferență devine pentru prima dată minimă, dacă h este dat de relația:

$$h_1 = \frac{\lambda}{2(\theta_1 - \theta_2)},$$

prin urmare se poate determina valoarea deschiderii unghiulare $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\lambda}{2h_1}$, dacă se cunoaște valoarea mărimii h_1.

3.4.1 Cazul unei distribuții continuă de surse.

In planul sursei considerăm o sursă de formă dreptunghiulară, iar toate sursele elementare de emisie ale acesteia ca fiind identice. Aceasta este echivalentă cu o sursă liniară dispusă între S și S', sursa liniară fiind proiecția dreptunghiului. Pentru acest tip de sursă se definește funcția $\varphi(\theta)d\theta$, care va reprezenta dublul intensității unei singure fante pe ecran, provenind de la sursele localizate între θ și $\theta + d\theta$. Intensitatea în tabloul de interferență va fi:

$$d\varphi = \varphi(\theta)\left\{1 + \cos\left[\frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c}\right]\right\}d\theta,$$

iar densitatea totală de flux corespunzătoare unghiului θ' este:

(3.4 6) $$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)\left\{1 + \cos\left[\frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c}\right]\right\}d\theta = \varphi_{tot}(1 + \gamma_{12}),$$

unde: $$\varphi_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)d\theta \text{ și } \gamma_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)\cos\frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c}d\theta}{\varphi_{tot}}.$$

De ex. să considerăm o sursă liniară poziționată prin unghiurile $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$, care emite fluxul total φ_{tot}, deci:

$$\varphi(\theta) = \frac{\varphi_{tot}}{\Delta\theta}, \text{ pentru: } \theta_1 \le \theta \le \theta_2$$

$$\varphi(\theta) = 0, \text{ pentru: } \theta \ge \theta_2 \text{ și } \theta \le \theta_1$$

Poziția unghiulară a centrului sursei este dată de: $\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Intensitatea în tabloul de interferență corespunzătoare unghiului θ' este:

(3.4 7)

$$\varphi(\theta') = \frac{\varphi_{tot}}{\Delta\theta} \int_{\theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}} \left[1 + \cos\frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c}\right] d\theta =$$

$$= \varphi_{tot} - \frac{\varphi_{tot}}{\Delta\theta}\frac{c}{\omega_0 h}\left[\sin\frac{\omega h\left(\theta' - \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}\right)}{c} - \sin\frac{\omega h\left(\theta' - \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}\right)}{c}\right] =$$

$$= \varphi_{tot}\left[1 + \frac{c}{\omega h \Delta\theta}\sin\frac{\pi \nu h \Delta\theta}{c}\cos\frac{\omega h(\theta' - \theta_0)}{c}\right]$$

Deci:

$$\varphi_{max}(\theta') = \varphi_{tot}\left[1 + \frac{\lambda}{\pi h \Delta\theta}\sin\frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda}\right], \text{ pentru: } \frac{\omega h(\theta' - \theta_0)}{c} = 2k\pi,$$

$$\varphi_{min}(\theta') = \varphi_{tot}\left[1 - \left|\frac{\lambda}{\pi h \Delta\theta}\sin\frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda}\right|\right], \text{ pentru: }$$

$$\frac{\omega h(\theta' - \theta_0)}{c} = (2k+1)\pi,$$

Prima valoare a mărimii h pentru care $V = 0$ (fig. 20) este dată de relația:

$$\frac{\pi h_1 \Delta\theta}{\lambda} = \pi, \text{ de unde: } h_1 = \frac{\lambda}{\Delta\theta} = l_{tran}$$

(față de $h_1 = \frac{\lambda}{2(\theta_1 - \theta_2)}$, de două ori mai mare decât în cazul a două surse punctiforme). In fig. 20 a este prezentată variația vizibilității tabloului de interferență dacă sursa de radiație este liniară, iar în fig. 20 b aceeași variație în cazul unei surse sub formă de disc.

Pentru ca o sursă extinsă să poată fi considerată drept o sursă punctiformă, este necesar ca valorile mărimilor h și $\Delta\theta$ să permită obținerea unei vizibilități a tabloului de interferență $V \cong 1$. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiția:

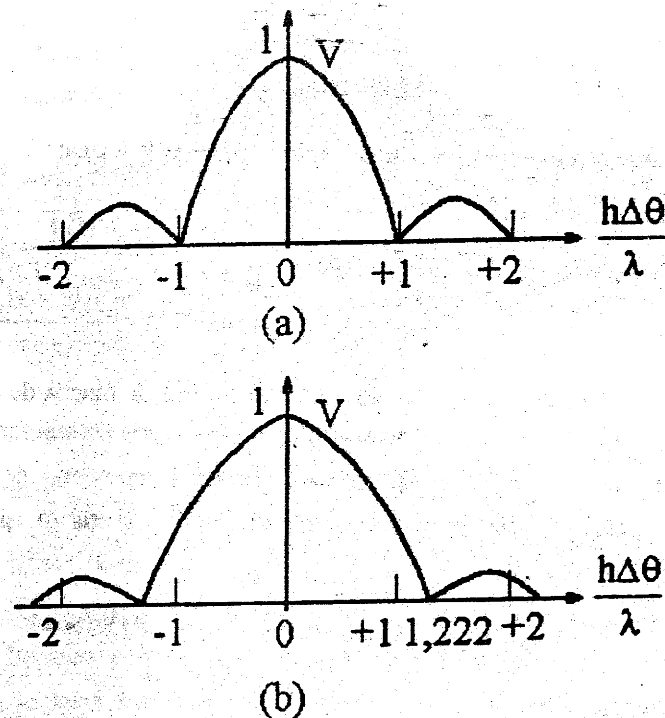


Fig. 20

$$\frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda} \langle\langle 1, \text{ deci } h\Delta\theta \langle\langle \frac{\lambda}{\pi} \cong \lambda$$

Pentru ca o sursă extinsă să poată fi considerată drept o sursă punctiformă, este necesar ca valorile mărimilor h și $\Delta\theta$ să permită obținerea unei vizibilități a tabloului de interferență $V \cong 1$. Pentru aceasta este necesar ca:

$$\frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda} \langle\langle 1, \text{ deci } h\Delta\theta \langle\langle \frac{\lambda}{\pi} \cong \lambda$$

Prin urmare, dacă este satisfăcută condiția $h\Delta\theta \langle\langle \lambda$, o sursă extinsă cu înălțimea unghiulară $\Delta\theta$ va acționa ca o sursă punctiformă.

3.4.2 Distribuția spectrală a câmpului de radiație.

Vor fi folosite notațiile anterioare (fig. 19) și se va considera distribuția unghiulară a intensității $\varphi(\theta)$. Se introduce funcția de distribuție unghiulară normată:

$$i(\theta)=\frac{\varphi(\theta)}{\varphi_{tot}} \text{ cu proprietatea: } \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)d\theta = 1.$$

Partea oscilatorie normată a figurii de interferenţă este de forma:

$$\varphi = \varphi_{tot}(1+\gamma_{12}), \text{ unde:}$$

(3.4 8) $$\gamma_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)\cos\frac{\omega h(\theta'-\theta)}{c}d\theta}{\varphi_{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos\frac{\omega h(\theta'-\theta)}{c}d\theta.$$

Presupunem că dependenţa de frecvenţă este descrisă de funcţia de distribuţie normată $g(\nu)$, iar toate sursele elementare sunt caracterizate prin aceeaşi funcţie. Deci relaţiile trebuie înmulţite cu $g(\nu)$ şi integrate. Termenii dependenţi de frecvenţă urmează să fie mediaţi folosind funcţie de ponderare $g(\nu)$. Funcţia φ îşi va păstra forma:

(3.4 9) $$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos\frac{\omega h(\theta'-\theta)}{c}d\theta\right\}d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)\cos\frac{\omega h(\theta'-\theta)}{c}d\nu\right\}d\theta.$$

Dacă se notează: $\tau = \frac{\omega h(\theta'-\theta)}{c}$ se obţine expresia funcţiei de autocorelare normată:

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)\cos\omega\tau d\nu, \text{ deci:}$$

(3.4 9') $$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\gamma\left[\frac{h(\theta'-\theta)}{c}\right]d\theta$$

In cazul radiaţiei monocromatice, funcţia de autocorelare este:

$$\gamma(\tau) = U(\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)],$$

unde: $U(\tau)$ şi $\phi(\tau)$ sunt funcţii lent-variabile faţă de variaţia funcţiei: $\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)]$. Deci:

(3.4 10)

$$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)U\left[\frac{h(\theta'-\theta)}{c}\right]\cos\left\{\frac{\omega_0 h(\theta'-\theta)}{c} + \phi\left[\frac{h(\theta'-\theta)}{c}\right]\right\}d\theta.$$

Presupunem că atunci când unghiul θ variază, valoarea mărimilor $U(\tau)$ şi $\phi(\tau)$ rămâne constantă pe domeniul de variaţie $\Delta\theta$, centrat pe valoarea θ_0. Deci mărimile $U(\tau)$ şi $\phi(\tau)$ rămân constante atunci când mărimea τ se modifică cu $\frac{h\Delta\theta}{c}$ în jurul valorii $\tau = \frac{h(\theta'-\theta_0)}{c}$. Pentru aceasta este necesar ca valoarea timpului de coerenţă să îndeplinească condiţia: $\tau_c \gg \tau = \frac{h\Delta\theta}{c}$. In aceste condiţii mărimea h va fi de ordinul lungimii de coerenţă transversală l_t: $h \cong l_t \le \frac{\lambda}{\Delta\theta}$ (condiţia de sursă punctiformă).

Deci: $\tau_c \gg \frac{h\Delta\theta}{c} = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\nu_0}$, adică $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \ll \nu_0$, relaţie ce defineşte radiaţia monocromatică.

Deoarece mărimile $U(\tau)$ şi $\phi(\tau)$ sunt lent-variabile faţă de unghiul θ, în argument se poate considera $\theta \cong \theta_0$, deci:

(3.4 11)

$$\gamma_{12} = U\left[\frac{h(\theta'-\theta_0)}{c}\right]\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos\left\{\frac{\omega_0 h(\theta'-\theta)}{c} + \phi\left[\frac{h(\theta'-\theta_0)}{c}\right]\right\}d\theta.$$

La nivelul ecranului se poate utiliza variabila $(\theta'-\theta_0)$, deci definim variabila: $\tau = \frac{h(\theta'-\theta_0)}{c}$, de unde:

(3.4 12) $$\gamma_{12} = U(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos\left[\omega_0\tau + \phi(\tau) - \frac{\omega_0 h(\theta-\theta_0)}{c}\right]d\theta.$$

Funcţia $i(\theta)$ este centrată la $\theta = \theta_0$, deci o putem redefini sub forma: $i(\theta) \to i(\theta-\theta_0)$, unde funcţia $i(\theta-\theta_0)$ este centrată $\theta-\theta_0 = 0$, prin urmare:

(3.4 13) $$\gamma_{12} = U(\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos\left[\omega_0\tau + \phi(\tau) - \frac{\omega_0 h\theta}{c}\right]d\theta,$$

unde τ şi h sunt variabile independente.

3.4.3 Utilizarea transformatelor Fourier.

Dacă în relaţia (3.4 13), considerând $u = \frac{\nu_0 h}{c}$, se dezvoltă funcţia *cos*, se obţine:

$$\gamma_{12}(\tau,h) = U(\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)]\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos\frac{\omega h\theta}{c}d\theta +$$

(3.4 14)

$$+ U(\tau)\sin[\omega_0\tau + \phi(\tau)]\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\sin\frac{\omega h\theta}{c}d\theta$$

relaţie ce reprezintă transformata Fourier a funcţiei $i(\theta)$.

Să considerăm funcţia sub forma:

$$\hat{i}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)e^{-i2\pi u\theta}d\theta = \mathrm{Re}\,\hat{i}(u) + i\,\mathrm{Im}\,\hat{i}(u) = |\hat{i}(u)|e^{-i\psi(u)}$$

unde:

$$\mathrm{Re}\,\hat{i}(u) = |\hat{i}(u)|\cos\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\cos 2\pi u\theta d\theta,$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{i}(u) = -|\hat{i}(u)|\sin\psi(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)\sin 2\pi u\theta d\theta.$$

In aceste condiţii, relaţia (3.4 14) devine:

(3.4 15)

$$\gamma_{12}(\tau,h) = U(\tau)|\hat{i}(u)| \times$$

$$\times \{\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)]\cos\psi(u) + \sin[\omega_0\tau + \phi(\tau)]\sin\psi(u)\} =$$

$$= U(\tau)|\hat{i}(u)|\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau) - \psi(u)] = \mathrm{Re}\left\{U(\tau)|\hat{i}(u)|e^{i[\omega_0\tau+\phi(\tau)-\psi(u)]}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{U(\tau)e^{i[\omega_0\tau+\phi(\tau)]}\hat{i}(u)\right\}$$

Această mărime descrie gradul complex de coerenţă.

(3.4 16) $$\tilde{\gamma}_{12}(\tau,h) = U(\tau)\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)e^{i[\omega_0\tau+\phi(\tau)]}.$$

Deoarece: $\hat{i}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)e^0 d\theta = 1$, se obţine:

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau,0) = \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = U(\tau)e^{i[\omega_0\tau+\phi(\tau)]}.$$

Pe de altă parte, deoarece pentru $\tau = 0$, $U(0) = 1$ şi $\phi(0) = 0$ se obţine:

(3.4 18)

$$\tilde{\gamma}_{12}(0,h) = \hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right) = \left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|e^{-i\psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta)e^{-i\frac{\omega_0 h\theta}{c}}d\theta.$$

Se poate scrie:

(3.4 19) $$\tilde{\gamma}_{12}(\tau,h) = \tilde{\gamma}_{12}(\tau,0)\tilde{\gamma}_{12}(0,h) = \tilde{\gamma}(\tau)\tilde{\gamma}_{12}(0,h).$$

Această relaţie descrie proprietăţile reduse ale gradului complex de coerenţă. Funcţia complexă $\tilde{\gamma}(\tau)$ conduce la funcţia de autocorelare prin intermediul relaţiei $\gamma(\tau) = \mathrm{Re}\,\tilde{\gamma}(\tau)$. Dacă prezintă interes numai *coerenţa spaţială transversală*, nu este necesară forma completă a mărimii $\gamma(\tau)$, ci numai valoarea acesteia pentru valori mici ale mărimii τ, adică:

$$\gamma(\tau) \propto \cos\omega_0\tau.$$

Vizibilitatea sau gradul de coerenţă. Pentru valori mici ale timpului de retardare $|\tau|$, se poate considera: $U(\tau) \cong 1$ şi $\phi(\tau) \cong 0$.

(3.4 20)

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau,h) = \mathrm{Re}\left\{U[\tau]e^{i[\omega_0\tau+\phi(\tau)]}\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right\} \cong \mathrm{Re}\left\{1\cdot|\hat{i}(u)|e^{i[\omega_0\tau-\psi(u)]}\right\} =$$

$$= \left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|\cos\left[\omega_0\tau - \psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right]$$

Deci: $\varphi = \varphi_{tot}(1 + \gamma_{12})$, de unde:

$$\varphi_{max} = \varphi_{tot}\left(1 + \left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|\right),\quad \cos\left[\omega_0\tau - \psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right] = +1$$

$$\varphi_{min} = \varphi_{tot}\left(1 - \left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|\right),\quad \cos\left[\omega_0\tau - \psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right] = -1.$$

Vizibilitatea tabloului de interferenţă în jurul centrului $\theta' = \theta_0$ este dată de relaţia:

(3.4 21) $$V(h) = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{min}}{\varphi_{max} + \varphi_{min}} = \left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right| = |\gamma_{12}(0,h)|,$$

reprezintă o măsură cantitativă a coerenţei mutuale şi se numeşte *grad de coerenţă.*

Dacă $U(\tau) \neq 1$, expresia vizibilităţii devine:

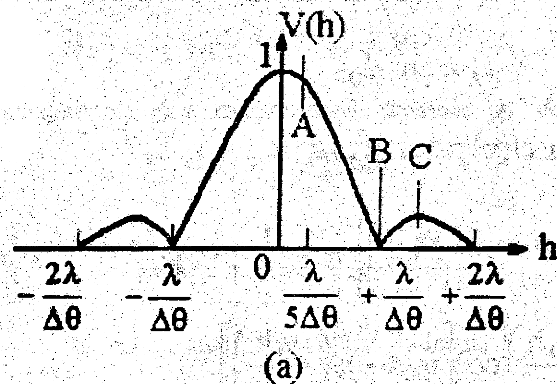
(3.4.22) $$V(\tau,h)=U(\tau)\left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|=U(\tau)|\gamma_{12}(0,h)|=U(\tau)V(h).$$

deoarece:

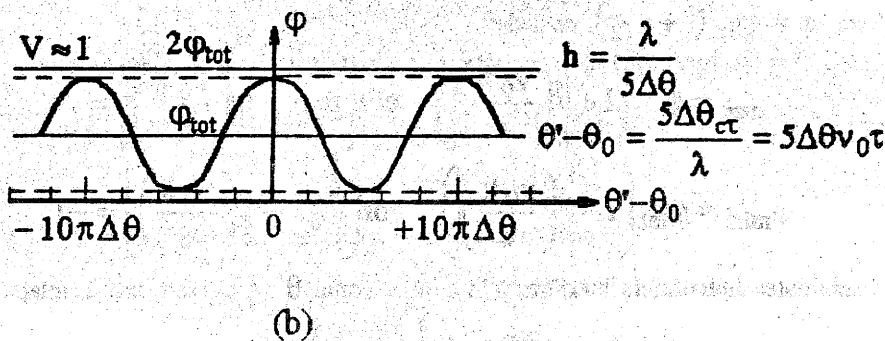
$$\gamma_{12}(\tau,h)=U(\tau)\left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|\cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]$$

$$\varphi_{max}=\varphi_{tot}\left[1+U(\tau)\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right],\ \text{dacă: } \cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]=+1$$

$$\varphi_{min}=\varphi_{tot}\left[1-U(\tau)\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right],\ \text{dacă: } \cos[\omega_0\tau+\phi(\tau)]=-1.$$



(a)

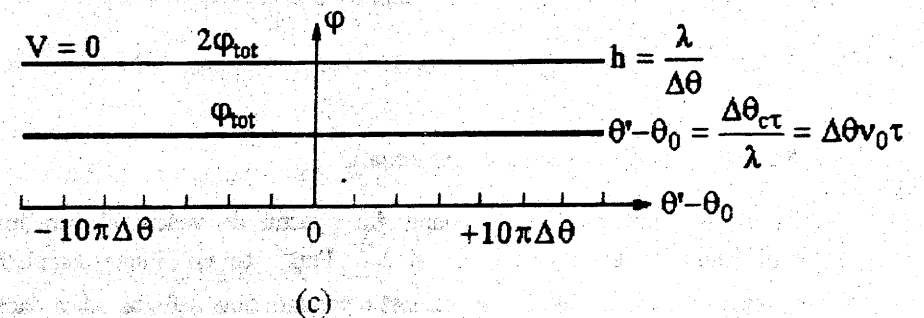


(b)

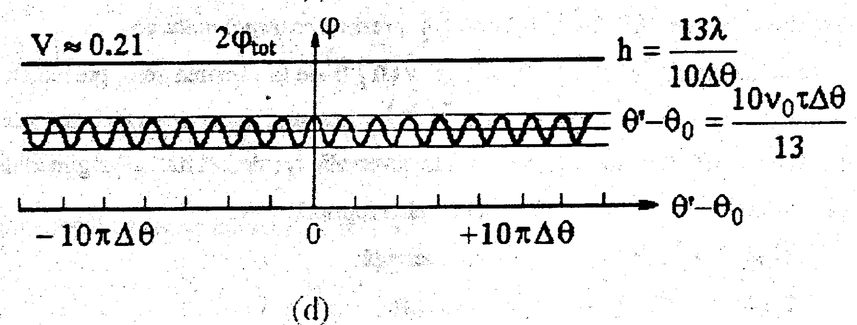
Fig. 21 a,b

Determinarea fazei mărimii $\hat{i}$. Dependenţa vizibilităţii tabloului de interferenţă $V(h)$ de mărimea h permite calcularea valorii absolute a mărimii $\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)$. Faza unghiulară $\psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)$ poate fi obţinută din măsurători precise asupra densităţii de flux în tabloul de interferenţă, dacă valoarea timpului de întârziere τ este aproape egală cu zero.

In fig. 21 a este prezentată variaţia vizibilităţii tabloului de interferenţă funcţie de valoarea mărimii h dacă forma sursei de radiaţie este liniară caracterizată prin lăţimea unghiulară $\Delta\theta$. In fig. 21 b,c,d este prezentată variaţia densităţii de flux pentru trei valori diferite ale mărimii h (punctele A, B şi C din fig. 21 a).



(c)



(d)

Fig. 21 c,d

Conform relaţiei:

$$\gamma_{12}(\tau,h)=\operatorname{Re}\tilde{\gamma}_{12}(\tau,h)\propto\left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|\cos\left[\omega_0\tau-\psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right],$$

franja de ordin zero cu maxim de intensitate, dacă $\psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right) \neq 0$, va fi deplasată din poziția: $\tau = \frac{h(\theta' - \theta)}{c} = 0$ în poziția:

$$\tau = \frac{h(\theta' - \theta_0)}{c} = \frac{1}{\omega_0}\psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right).$$

În acest mod se determină mărimea $\psi\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)$ și se construiește funcția complexă: $\tilde{\gamma}_{12}(0,h) = \hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)$.

3.5 Lungimea de coerență transversală.

Să analizăm experimentul lui Young din punctul de vedere al corelării fluctuațiilor câmpului radiat de sursele S_1 și S_2. Franje cu vizibilitate completă ($V = 1$) se obțin numai dacă fluctuațiile prezintă o corelare bine definită, adică dacă radiația optică emisă de sursa S_1, respectiv S_2 prezintă *coerență mutuală*.

În cazul surselor extinse am văzut că $V(h)$ tinde la valoarea zero, prezentând câteva oscilații. Valorile mici ale mărimii $V(h)$ corespund lipsei coerenței mutuale. De aceea se definește lungimea de coerență transversală l_t, deosebită de lungimea de coerență longitudinală $l_l = c\tau_c$, cu următoarele proprietăți:

- $h \rangle\rangle l_t \rightarrow V(h) = 0$, nu există coerență;
- $h \langle\langle l_t \rightarrow V(h) = 1$, există coerență;
- $h \approx l_t \rightarrow 0 \langle V(h) \rangle 1$, există coerență parțială.

Lungimea de coerență transversală este finită, deoarece radiația este emisă de către o distribuție de surse de formă finită. Chiar dacă am accepta că fasciculele de radiație emise de sursele individuale ar sosi în fază la S_1, din cauza distanțelor de propagare diferite, ele nu ar sosi în fază la S_2, în afara cazului când valoarea mărimii h ar fi mică. Pentru valori mici ale mărimii h, faza în punctul S_1 este complet corelată cu cea din S_2 (diferența de fază este bine definită).

Dacă $h \cong l_t$, atunci diferența de fază prezintă fluctuații medii în timp de ordinul $\pm 1\,\text{rad}$. (Aceste fluctuații apar în intervalul de timp τ_c sec. Un detector al cărui timp de răspuns T este mult mai mic față de τ_c va putea să înregistreze figura de interferență pe ecran, chiar dacă $h \rangle l_t$, dar tabloul de interferență va fluctua în timp, adică în medie se va deplasa cu o jumătate de franjă în intervalul de timp τ_c, prin urmare în timp lung nu se va observa tabloul de interferență. Pentru o sursă liniară sau un disc se poate considera că: $l_t \cong h$, deci se obține: $l_t = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$.

Funcția de corelare. Câmpul electric în punctul P de pe ecran (fig. 19 a), la momentul t', este proporțional cu valoarea câmpului electric $e_1\left(t' - \frac{|S_1P|}{c}\right)$ în punctul S_1, la momentul retardat cu $\frac{S_1P}{c}$, și cu câmpul $e_2\left(t' - \frac{|S_2P|}{c}\right)$ în punctul S_2, la momentul retardat cu $\frac{S_2P}{c}$:

(3.5 1) $$e_P(t) \propto e_1\left(t' - \frac{|S_1P|}{c}\right) + e_2\left(t' - \frac{|S_2P|}{c}\right).$$

Notăm: $\tau = \frac{|S_2P| - |S_1P|}{c} \cong \frac{h\theta'}{c}$. Dacă se introduce variabila: $t = t' - \frac{|S_1P|}{c}$ - momentul temporal în S_1, relația (3.5 1) devine:

(3.5 2) $$e_P\left(t + \frac{|S_1P|}{c}\right) = e_1(t) + e_2(t - \tau).$$

Densitatea spectrală de flux este proporțională cu $\langle e_P{}^2 \rangle$:

(3.5 3) $$\langle e_P{}^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} e_P(t)^2 dt = \langle [e_1(t) + e_2(t - \tau)]^2 \rangle =$$
$$= \langle e_1(t)^2 \rangle + \langle e_2(t - \tau)^2 \rangle + 2\langle e_1(t) e_2(t - \tau) \rangle =$$

$$= \langle e_1(t)^2 \rangle + \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle +$$

$$+ 2\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle} \frac{\langle e_1(t) e_2(t-\tau) \rangle}{\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle}} =$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 + 2\sqrt{\varphi_1 \varphi_2}\, \gamma_{12}$$

unde:

(3.5 4) $$\gamma_{12} = \frac{\langle e_1(t) e_2(t-\tau) \rangle}{\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle}},$$

reprezintă *funcția de corelare normată*, o mărime independentă de valorile relative ale elongațiilor e_1 și e_2, dar care depinde de valoarea timpului de retardare (τ) și de valoarea distanței de separare a fantelor (h). Dacă valoarea $h \to 0$, atunci $e_2(t-\tau)$ devine egal cu o constantă înmulțit cu $e_1(t-\tau)$, deci:

$$\lim_{h \to 0} \gamma_1(\tau, h) = \gamma(\tau) \text{ (funcția de autocorelare).}$$

Dacă $\varphi_1 = \varphi_2$, adică: $\langle e_1{}^2 \rangle = \langle e_2{}^2 \rangle$, se obține: $\varphi = 2\varphi_1(1+\gamma_{12})$, unde:

$$\gamma_{12} = \frac{\langle e_1(t) e_2(t-\tau) \rangle}{\langle e_1(t)^2 \rangle}, \text{ este echivalent cu relația (3.4 9'):}$$

$$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \gamma\left[\frac{h(\theta' - \theta)}{c}\right] d\theta.$$

Dacă se consideră expresia semnalului analitic, se poate defini *funcția de corelare complexă*:

(3.5 5 a) $\tilde{\Gamma}_{12} = \langle \tilde{e}_1(t) \tilde{e}_2{}^*(t-\tau) \rangle$, respectiv: b) $$\gamma_{12} = \frac{\langle \tilde{e}_1(t) e_2{}^*(t-\tau) \rangle}{\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle}},$$

denumită *grad de corelare complex*, unde γ_{12} este partea reală a mărimii $\tilde{\gamma}_{12}$, iar $|\tilde{\gamma}_{12}|$ - gradul de coerență, care este identic cu mărimea V. Mărimea $|\tilde{\gamma}_{12}|$ reprezintă o măsură cantitativă a *coerenței mutuale* dintre câmpurile e_1 și e_2. Dacă $|\tilde{\gamma}_{12}| = 1$ coerența este completă iar termenul de interferență prezintă valoarea maximă; valoarea

$|\tilde{\gamma}_{12}| = 0$ evidențiază lipsa completă a coerenței, iar relația $0 \langle |\tilde{\gamma}_{12}| \langle 1$ evidențiază coerența parțială.

Evaluarea mărimii γ_{12} pentru o sursă extinsă. Să considerăm o sursă extinsă, constituită dintr-un ansamblu de surse punctiforme distanțate una față de alta și care formează unghiurile θ_j cu normala la planul celor două fante. Câmpurile la nivelul fantelor S_1 și S_2 sunt date de sume de forma:

$$e_1(t) = \sum_{j=1}^{N} e_{1j}(t) \text{ și } e_2(t-\tau) = \sum_{j=1}^{N} e_{2j}(t-\tau),$$

unde e_{2j} reprezintă câmpul instantaneu la nivelul fantei S_2 generat de sursa j.

Funcția de corelație γ_{12}, conform relației (3.5 4) este:

$$\gamma_{12} = \frac{\langle e_1(t) e_2(t-\tau) \rangle}{\langle e_1(t)^2 \rangle}.$$

Dacă valoarea timpului de mediere este mare față de cea a timpului de coerență a radiației optice, deoarece în timpul unei măsurători diferența de fază se modifică cu mai mulți radiani, atunci valorile medii de forma: $\langle e_{1j}(t) e_{2k}(t-\tau) \rangle$ sunt egale cu zero, exceptând cazul $j = k$. Rezultatul interferenței radiației de la sursa j se poate observa numai dacă aceasta interferă cu ea însăși, deci:

(3.5 6) $$\gamma_{12} = \frac{\sum_j \langle e_{j1}(t) e_{2j}(t-\tau) \rangle}{\sum_j \langle e_{j1}(t)^2 \rangle}.$$

Radiația ce provine de la o sursă punctiformă la S_1, față de S_2, are un timp de propagare suplimentar $\frac{h\theta}{c}$, adică:

$$e_{1j}(t) = e_{2j}\left(t - \frac{h\theta_j}{c}\right) \text{ (la nivelul fantei), deci:}$$

(3.5 7)
$$\gamma_{12}=\frac{\sum_j\left\langle e_{2j}\left(t-\frac{h\theta_j}{c}\right)e_{2j}(t-\tau)\right\rangle}{\sum_j\left\langle e_{2j}\left(t-\frac{h\theta_j}{c}\right)^2\right\rangle}.$$

In această relaţie pentru intervale de timp de mediere mari, se obţine o stare staţionară pentru care fiecare proces de mediere este independent de momentul t_0. De aceea, în fiecare termen se poate înlocui variabila t cu $t+ct$, fără a modifica rezultatul. Inlocuind variabila t prin $t+\frac{h\theta_j}{c}$, se obţine:

$$\gamma_{12}=\frac{\sum_j\left\langle e_{2j}(t)e_{2j}\left(t-\tau+\frac{h\theta_j}{c}\right)\right\rangle}{\sum_j\left\langle e_{2j}(t)^2\right\rangle}.$$

Deci, pentru o sursă j, funcţia de autocorelare va fi:

$$\gamma_j(\tau)=\frac{\left\langle e_{2j}(t)e_{2j}(t-\bar{\tau})\right\rangle}{\sum_j\left\langle e_{2j}(t)^2\right\rangle}.$$

Dacă toate sursele elementare sunt caracterizate prin aceeaşi funcţie de distribuţie spectrală: $\gamma_j(\tau)=\gamma(\tau)$, atunci:

$$\gamma_{12}=\frac{\sum_j\left\langle e_{2j}(t)\right\rangle\gamma\left(\tau-\frac{h\theta_j}{c}\right)}{\sum_j\left\langle e_{2j}(t)^2\right\rangle}$$ (se înmulţeşte şi se împarte cu $\left\langle e_{2j}(t)^2\right\rangle$).

Pentru diferite valori $\gamma\left(\tau-\frac{h\theta_j}{c}\right)$, această mărime reprezintă o medie ponderată cu factorul de ponderare: $\frac{\left\langle e_{2j}(t)^2\right\rangle}{\sum_j\left\langle e_{2j}(t)^2\right\rangle}$, care, dacă o fantă este închisă, descrie densitatea de flux corespunzătoare fantei S_2.

Pentru o distribuţie continuă se poate scrie:

$$\gamma_{12}=\int_{-\infty}^{+\infty}i(\theta)\gamma\left[\tau-\frac{h\theta}{c}\right]d\theta,$$

care este identică cu relaţia (3.4 9'):

$$\gamma_{12}=\int_{-\infty}^{+\infty}i(\theta)\gamma\left[\tau-\frac{h(\theta'-\theta)}{c}\right]d\theta,\ \text{deoarece: } \tau=\frac{h\theta'}{c}.$$

3.6 Intensitatea fluctuaţiilor în spectroscopia interferenţială.

Radiaţia de tip Gauss (termică) reprezintă suprapunerea semnalelor ce provin de la un număr foarte mare de surse independente. Pentru acest tip de radiaţie, amplitudinea instantanee şi faza semnalului rezultant fluctuează datorită variaţiilor întâmplătoare ale relaţiilor de fază şi ale amplitudinii semnalelor individuale. O variaţie mare a fazei semnalului rezultant este însoţită de o fluctuaţie mare a amplitudinii.

Comportarea fluctuaţiilor amplitudinii conţine informaţii despre fluctuaţiile fazei sau, mai precis, despre corelarea de fază. Dacă radiaţia emisă de către două surse punctiforme S_1 şi S_2 prezintă coerenţă mutuală spaţială, atunci va exista o corelare pozitivă a mărimii fluctuaţiilor. De ex. dacă există o fluctuaţie pozitivă faţă de valoarea medie generată de sursa S_1, atunci probabilitatea ca fluctuaţia să fie tot pozitivă la sursa S_2 este mult mai mare faţă de probabilitatea ca să fie o fluctuaţie negativă şi invers.

Acest efect se poate folosi pentru a măsura coerenţa *spaţială* şi *temporală*. In astronomie coerenţa spaţială a radiaţiei ce provine de la o sursă stelară depinde de dimensiunile sursei şi forma ei. Tehnica corelării intensităţii fluctuaţiilor este utilizată pentru măsurarea diametrului unghiular al stelelor.

3.6.1 Interferometru cu corelarea intensităţii fluctuaţiilor.

Detectorul de energie a radiaţiei furnizează un semnal proporţional cu densitatea de flux incidentă, mediată pe un interval de timp T. Presupunem că pe întreaga arie a suprafeţei sensibile a detectorului câmpul detectat prezintă coerenţă spaţială completă. Dacă considerăm un timp de mediere al detectorului foarte scurt, atunci putem considera că detectorul indică valoarea instantanee $I(t)$ a semnalului proporţională cu $e(t)^2$. Pentru început, presupunem că timpul de mediere T este mult mai mic faţă de timpul de coerenţă τ_c al radiaţiei ($T \ll \tau_c$).

Dacă din semnalul detectat este eliminată componenta continuă (componenta medie) a semnalului la ieşire, care este proporţională cu valoarea $\langle I(t)\rangle$ pe intervalul

lung de mediere, atunci va fi detectată numai componenta variabilă (cea care fluctuează), proporțională cu (fig. 22):

$$\delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle .$$

In fig. 22, graficul (a) descrie așa numita intensitate instantanee $\langle I(t) \rangle$ definită mai sus, graficul (b) descrie fluctuațiile instantanee $\delta I(t)$, iar graficul (c) descrie fluctuațiile netezite (mediate), centrate pe momentele t_0 ale intensității.

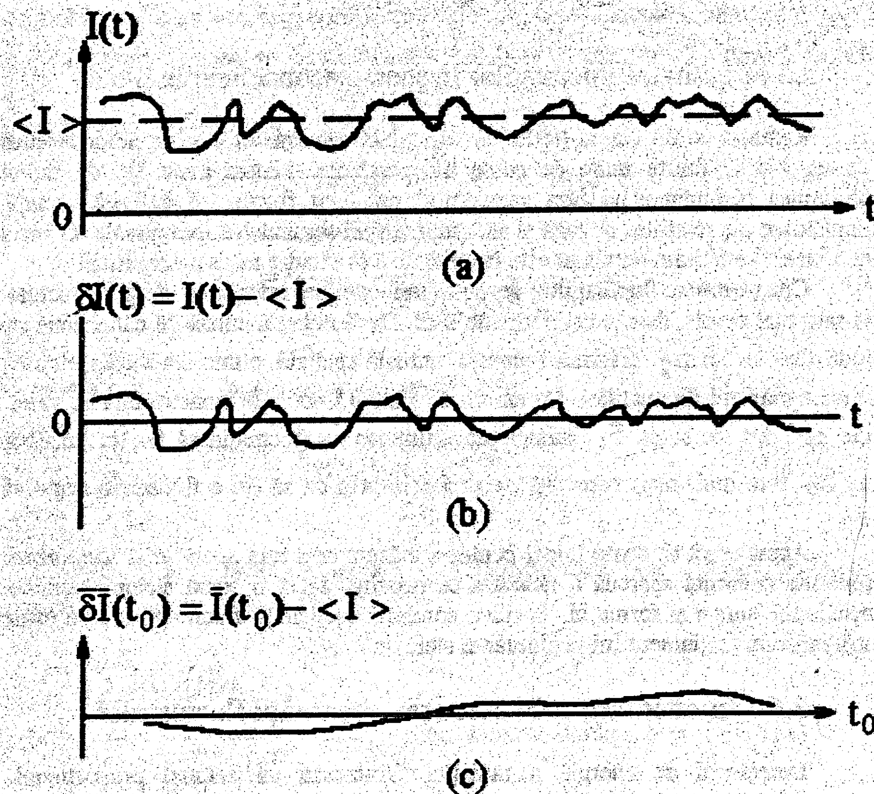


Fig. 22 a,b,c

In cazul experimentului Young, pentru a analiza coerența mutuală a câmpului *em* în punctele S_1 și S_2, în planul acestora, s-a plasat un ecran cu două fante. In cazul de față, în cele două puncte se plasează doi detectori. Semnalul de la FM_2, față de FM_1, este întârziat cu intervalul de timp de retardare τ trecându-l printr-o linie de întârziere variabilă (fig. 23). Semnalul rezultant, proporțional cu $\delta I_1(t)$, respectiv

$\delta I_2(t-\tau)$, este introdus într-un corelator, un dispozitiv care realizează medierea pe timp lung a produsului celor souă semnale, deci semnalul la ieșire este proporțional cu:

$$\langle \delta I_1(t) \delta I_2(t-\tau) \rangle .$$

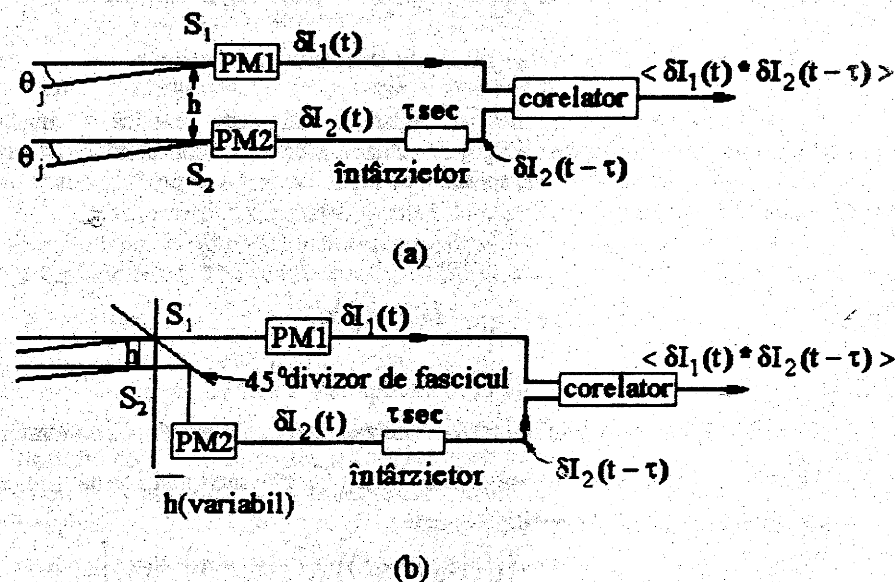


Fig. 23 a,b

Acest rezultat poate fi analizat funcție de variabilele independente: timpul de retardare τ și distanța dintre fante h. Pentru $h = 0$, semnalul la ieșire va fi proporțional cu funcția de autocorelare $\langle \delta I(t) \delta I(t-\tau) \rangle$ a intensității fluctuațiilor, deoarece: $I_1(t) = I_2(t) = I(t)$.

3.6.2 Expresia mărimii $\langle \delta I_1(t) \delta I_2(t-\tau) \rangle$ în cazul radiației termice monocromatice.

In acest caz, calculul funcției de corelare este destul de complicat. Semnalul se exprimă ca o suprapunere de semnale de la sursele independente constituente ale sursei și se calculează mărimea δI, respectiv funcția de corelare. Presupunând că toate sursele au aceeași funcție de distribuție spectrală se obține:

(3.6 1) $$\langle \delta I_1(t) \delta I_2(t-\tau) \rangle = \langle I \rangle^2 \left| \tilde{\gamma}_{12}(\tau, h) \right|^2 .$$

Datorită proprietăților de reducere a gradului de coerență se poate scrie:

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau,h)=\tilde{\gamma}(\tau)\tilde{\gamma}_{12}(0,h)$$, unde: $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau,h)|=U(\tau)V(h)$

prin urmare:

(3.6 2) $$\langle\delta I_1(t)\delta I_2(t-\tau)\rangle=\langle I\rangle^2 U(\tau)^2 V(h)^2.$$

Acest rezultat leagă corelarea intensității fluctuațiilor cu proprietățile de coerență.

3.6.3 Extinderea la valori mari ale timpului de mediere.

La obținerea relației de mai sus există o dificultate practică și anume imposibilitatea medierii instantanee asupra intensității, care a fost considerată mai sus. Circuitele electronice nu pot răspunde suficient de rapid. De aceea se produce o netezire dată de relația de mediere:

(3.6 3) $$\bar{I}(t_0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t+t_0)dt,$$

unde $I(t+t_0)$ reprezintă media instantanee utilizată mai sus. Deviația $\delta\bar{I}$ a mărimii $\bar{I}$ față de media acesteia pe un interval de timp lung $\langle I\rangle$ este mult mai netedă: (fig. 22 c). Acesta reprezintă semnalul corelat de aparat:

$$\langle\delta\bar{I}_1(t_0)\delta\bar{I}_2(t_0-\tau)\rangle=\langle[\bar{I}_1(t_0)-\langle I\rangle][\bar{I}_2(t_0-\tau)-\langle I\rangle]\rangle,$$

unde medierea se face pe un interval de timp lung centrat pe t_0.

In acest caz relația (3.6 2) se înlocuiește cu expresia:

$$\frac{\langle\delta\bar{I}_1(t_0)\delta\bar{I}_2(t_0-\tau)\rangle}{\langle I\rangle^2}=V(h)^2\frac{\xi(T,\tau)}{T},$$

unde: $$\xi(T,\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{-T}(T-|r|)[U(\tau+r)]^2 dr.$$

In situații reale, deoarece timpul de măsură T este cu mult mai mare față de timpul de coerență τ_c, relației (3.6 2) îi corespunde:

(3.6 4) $\langle\delta\bar{I}_1(t_0)\delta\bar{I}_2(t_0-\tau)\rangle=\langle I\rangle^2 V(h)^2\frac{\tau_c}{T}$, dacă $\tau\langle T$, respectiv:

$\langle\delta\bar{I}_1(t_0)\delta\bar{I}_2(t_0-\tau)\rangle=0$, dacă $\tau\rangle T$, τ – timp de întârziere.

Această relație se menține, excepție făcând cazul: $|(|\tau|-T)|\cong\tau_c$.

In această relație, micșorarea termenului cu factorul $\frac{\tau_c}{T}\langle\langle 1$ face ca fluctuațiile netezite să fie mult mai dificil de observat față de cele instantanee. Aceasta rezultă și prin comparația graficelor (b) și (c) din fig. 22. Conform relației (3.6 4), se observă că se poate determina funcția: $V(h)=\left|\hat{i}\left(\frac{\nu_0 h}{c}\right)\right|$, unde $i(\theta)=\frac{I(\theta)}{I_{tot}}$ reprezintă funcția de distribuție unghiulară a intensității.

3.6.4 Experimente.

Corelarea intensității fluctuațiilor în fasciculele de radiație optică a fost demonstrată de către R. Hanbury Brown și R.Q. Twiss (1956) cu dispozitivul prezentat schematic în fig. 23 b. S-a utilizat radiația filtrată a unei lămpi cu Hg, valoarea timpului de coerență fiind $\tau_c\cong 10^{-9}$ s, iar cea a timpului de integrare $T\cong 40$ ns. Rezultatele obținute au verificat relația 3.6 4.

Această tehnică a fost aplicată și la un interferometru stelar, format din două oglinzi cu diametrul de 7 m, în care mărimea h s-a putut varia la valori de peste 25 m. Radiația optică de la o stea a fost înregistrată cu doi FM. La interferometrul stelar Michelson toleranțele dimensionale erau de ordinul λ, deci foarte precise. In acest caz imaginea nu este necesar să fie de bună calitate. Parametrii experimentului trebuie menținute în limitele valorii mărimii l_t sau cT. Eroarea asupra timpului este mult mai mică decât intervalul de mediere T.

3.6.5 Considerații cuantice.

In analiza precedentă a fost neglijată natura cuantică a radiației optice precum și natura proceselor utilizate pentru măsurarea intensității radiației optice. La nivelul detectorului energia radiației *em* sosește sub formă de cuante de energie a căror valoare este $h\nu$. Această structură determină fluctuații de intensitate și reprezintă o importantă sursă de zgomot.

Numărătorul cuantic. Să considerăm că drept numărător cuantic este folosit un detector fotoelectric (de ex. un FM) care poate număra fotoelectronii individuali. Presupunem că s-au înlăturat sursele de zgomot: curentul de întuneric, zgomotul Johnson și efectul de "alice" din amplificator, singura sursă de zgomot (fluctuațiile curentului fotoelectric) este determinată de natura cuantică a procesului fotoelectric sau, ceea ce reprezintă același lucru, curentul electric reprezintă curgerea unor particule individuale încărcate.

Notăm cu $I(t)$ fluxul mediat pe timp scurt care ajunge la detector, prin urmare în intervalul de timp dt, la detedtor ajunge cantitatea de energie $I(t)$ sub formă de cuante de energie $h\nu$. Presupunem că fiecare cuantă poate extrage din catod

un electron, pe care-l presupunem că va fi detectat de către circuitul electronic cu o probabilitate egală cu unitatea. În FM fiecare fotoelectron va fi multiplicat la o sarcină de 10^6 electroni în câteva nanosecunde.

Introducem noțiunea de randament cuantic (α) - probabilitatea ca un foton să conducă la un fotoelectron. Atunci când energia $I(t)$ este incidentă pe detector, numărul $d\,\mathrm{n}(t)$ de fotoelectroni emiși va fluctua din cauza naturii statistice a procesului fotoelectric. Valoarea "așteptată" (valoarea medie), calculată pe mai multe experimente și pe intervalul dt va fi:

(3.6 5) $$d\,\mathrm{n}(t) = \frac{\alpha I(t)dt}{h\nu}.$$

Numărul mediu de fotoelectroni detectați de către detector în intervalul de timp T este:

$$[\bar{\mathrm{n}}(\mathrm{t_0})] = \int_{\mathrm{t_0}-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\mathrm{t_0}+\frac{\mathrm{T}}{2}} d\,\mathrm{n}(t') = \frac{\alpha}{h\nu}\int_{\mathrm{t_0}-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\mathrm{t_0}+\frac{\mathrm{T}}{2}} I(t')dt' = \frac{\alpha}{h\nu}\mathrm{T}\bar{I}(\mathrm{t_0}).$$

Pentru radiația termică, mărimea $I \propto \mathrm{E}^2$, reprezintă o mărime variabilă aleatoare de tip Gauss. Cercetările detaliate ale statisticii fotonice au arătat că în acest caz nu este necesar să se facă deosebire între valoarea instantanee $\bar{\mathrm{n}}(\mathrm{t_0})$ față de valoarea medie $[\mathrm{n}(\mathrm{t_0})]$. Fluctuațiile mărimii $\bar{\mathrm{n}}(\mathrm{t_0})$ pot fi considerate ca fluctuații ale mărimii $\bar{I}(\mathrm{t_0})$, deci se poate considera:

(3.6 6) $$\bar{\mathrm{n}}(\mathrm{t_0}) = \frac{\alpha}{h\nu}\mathrm{T}\bar{I}(\mathrm{t_0}).$$

Medierea pe timp lung conduce la relația:

(3.6 7) $$\langle \mathrm{n} \rangle = \frac{\alpha}{h\nu}\mathrm{T}\langle \bar{I} \rangle.$$

Să considerăm indicațiile $\mathrm{n_1}$ și $\mathrm{n_2}$ din expresia anterioară date de cei doi FM. Fluctuațiile lor vor fi date de:

(3.6 8) $$\delta\bar{\mathrm{n}}_1(\mathrm{t_0}) = \bar{\mathrm{n}}_1(\mathrm{t_0}) - \langle \mathrm{n} \rangle = \frac{\alpha}{h\nu}\mathrm{T}\left[I_1(t_0) - \langle I \rangle\right] = \frac{\alpha}{h\nu}\mathrm{T}\,\delta\bar{I}_1(\mathrm{t_0})$$

$$\delta\bar{\mathrm{n}}_2(\mathrm{t_0}-\tau) = \frac{\alpha\mathrm{T}}{h\nu}\delta\bar{I}_2(\mathrm{t_0}-\tau).$$

Se poate calcula funcția de corelare a fluctuației numărului de electroni numărați:

(3.6 9) $$\left\langle \delta\bar{\mathrm{n}}_1(\mathrm{t_0})\delta\bar{\mathrm{n}}_2(\mathrm{t_0}-\tau) \right\rangle = \left(\frac{\alpha\mathrm{T}}{h\nu}\right)^2 \left\langle \delta\bar{I}_1(\mathrm{t_0})\delta\bar{I}_2(\mathrm{t_0}-\tau) \right\rangle = $$
$$= \left(\frac{\alpha\mathrm{T}\langle I \rangle}{h\nu}\right)^2 \mathrm{V(h)}^2 \frac{\xi(\mathrm{T},\tau)}{\mathrm{T}}$$

Folosind relația (3.6 4), relația (3.6 9) devine:

(3.6 10) $$\left\langle \delta\mathrm{n}_1(\mathrm{t_0})\delta\mathrm{n}_2(\mathrm{t_0}-\tau) \right\rangle = \left(\frac{\alpha\mathrm{T}\langle I \rangle}{h\nu}\right)^2 \mathrm{V(h)}^2 \frac{\xi(\mathrm{T},\tau)}{\mathrm{T}} = \langle \mathrm{n} \rangle^2 \mathrm{V(h)}^2 \frac{\xi(\mathrm{T},\tau)}{\mathrm{T}}.$$

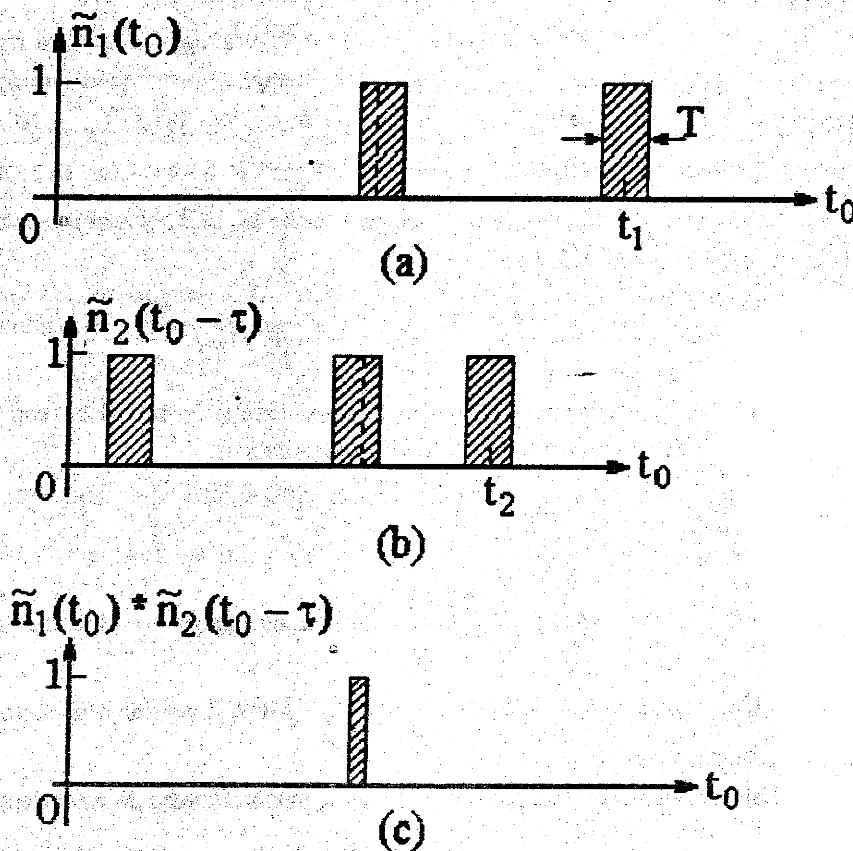


Fig. 24

Relaţi (3.6 10) arată că pentru valori h şi τ care conduc la o valoare $V(h)^2 \xi(T,\tau)\rangle 0$ există o corelare pozitivă între numărarea în exces la FM_1 şi cea de la FM_2, adică o numărare la FM_1 este mai probabil să fie însoţită de o numărare la FM_2, decât s-ar aştepta pe baza şansei pure. Aceste numărări corelate se numesc *coincidenţe*.

Experimentul de coincidenţă. Presupunem un interval de timp de măsură T suficient de scurt, astfel încât numărul mediu de numărări $\langle n\rangle$ în intervalul T este cu mult mai mic faţă de unitate. In fig. 24 funcţia $\bar{n}_1(t_0)$ este reprezentată sub forma unui dreptunghi. Dacă un electron este emis la momentul t_1, atunci $\bar{n}_1(t_0)$ este egal cu unitatea pe un interval de timp egal cu T, centrat pe momentul $t_0 = t_1$.

In aceste condiţii, produsul $\bar{n}_1(t_0)\bar{n}_2(t_0-\tau)$ este egal cu unitatea atunci când ambii FM prezintă o numărare şi zero în caz contrar. Această numărare dublă reprezintă o *coincidenţă*. Aceasta va apărea ori de câte ori $|t_1 - t_2| \leq T$, iar lăţimea anvelopei pulsului în reprezentarea $\bar{n}_1(t_0)\bar{n}_2(t_0-\tau)$ funcţie de t_0 va fi $T-|t_1 - t_2|$, care variază de la zero la T şi are o medie la $T/2$. Numărul mediu de coincidenţe într-o secundă va fi:

$$R_c = \frac{\langle \bar{n}_1(t_0)\bar{n}_2(t_0-\tau)\rangle}{T/2} = \frac{2\langle n\rangle^2}{T}\left[1+V(h)^2\frac{\xi(T,\tau)}{T}\right]. \quad (3.6\ 11)$$

Dacă n_1 şi n_2 prezintă valori pur întâmplătoare şi nu sunt deloc corelate, atunci va exista numai o rată *accidentală de coincidenţe* dată de:

$$R_a = \frac{2\langle n\rangle^2}{T} = 2TR_1^2, \quad (3.6\ 12)$$

unde $R_1 = \frac{\langle n\rangle}{T}$ reprezintă rata medie de detecţie a unui singur fotoelectron. Deci:

$R_c = R_a(1+\eta)$, unde $\eta = V(h)^2 \frac{\xi(T,\tau)}{T}$, iar $(1+\eta)$ reprezintă un factor de creştere rezultat din corelare.

Dacă se numără coincidenţele în S secunde, numărul mediu de coincidenţe va fi:

$$\bar{N}_a = SR_a = \frac{2S\langle n\rangle^2}{T} = 2STR_1^2 \text{ - pentru coincidenţe accidentale}$$

$$\bar{N}_c = SR_c = \bar{N}_a(1+\eta) \text{ - pentru coincidenţe corelate.}$$

Se pune problema preciziei determinării valorilor mărimilor N_a, respectiv N_c. Dacă considerăm coincidenţele drept evenimente întâmplătoare necorelate, atunci deviaţia standard pentru o singură determinare a mărimii N_a, respectiv N_c este estimată a fi $\sqrt{N_a}$, respectiv $\sqrt{N_c}$. Daca N nu este prea mic, atunci 67% din determinările individuale ale lui N sunt dispuse în intervalul $N\pm\sqrt{N}$, iar 95% în intervalul $N\pm 2\sqrt{N}$.

3.6.6 Consideraţii asupra zgomotului.

Pentru a măsura factorul η cu o oarecare certitudine, trebuie să avem o diferenţă $\bar{N}_c - \bar{N}_a$ cu un ordin de mărime mai mare ca $\sqrt{\bar{N}_c}$. Dacă N_a a fost determinat anterior cu o precizie mare, atunci eroarea $N_c - N_a$ va fi aceea asupra lui N_c şi anume $\pm\sqrt{\bar{N}_c}$. Se poate scrie:

$$N_c - N_a = \bar{N}_a + \eta\bar{N}_a - \bar{N}_a \pm \sqrt{1+\eta}\sqrt{\bar{N}_a}$$

Raportul semnal/zgomot (SNR – signal-to-noise ratio) este definit ca valoarea medie a semnalului divizat la deviaţia standard:

$$SNR = \frac{\bar{N}_c - \bar{N}_a}{\sqrt{\bar{N}_c}} = \frac{\eta\bar{N}_a}{\sqrt{1+\eta}\sqrt{\bar{N}_a}} = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta}}\sqrt{\bar{N}_a}. \quad (3.6\ 13)$$

Dacă se utilizează un detector lent, atunci $\tau_c \langle\langle T$, iar: $\eta = V(h)^2 \frac{\tau_c}{T}\langle\langle 1$ (se poate neglija mărimea η faţă de valoarea 1), se obţine:

$$SNR = V(h)^2\sqrt{\frac{2S}{T}}(R_1\tau_c) \quad (3.6\ 14)$$

Pentru radiaţia termică, produsul $R_1\tau_c \leq 10^{-2}$ (să considerăm, de ex.: $R_1\tau_c = 10^{-3}$). Dacă dorim: $SNR = 10 = 10^2\sqrt{\frac{2S}{10^{-8}}}10^{-3}$, se obţine valoarea: $S = 5000\,sec$, care reprezintă o valoare tipică. Dar, dacă dorim $SNR = 1$, atunci $S = 50\,sec$.

Pentru un detector rapid: $T\langle\langle\tau_c$ avem: $\eta = V(h)^2 U(\tau)^2$ şi se obţine:

(3.6 15) $$\mathrm{SNR} = \frac{[V(h)U(\tau)]^2}{\sqrt{1+[V(h)U(\tau)]^2}}\sqrt{\frac{2ST}{\tau_c^2}}(R_1\tau_c).$$

Această incertitudine asupra rezultatului unei singure măsurători a lui $N_c - N_a$ este determinată de natura cuantică a radiației optice și este cunoscută sub denumirea de *"zgomotul împușcăturilor cu fotoni"* (photon shot noise). Deoarece același proces cuantic intrinsec apare și în măsurătorile corelării fluctuațiilor de intensitate, unde fotoelectronii individuali nu sunt numărați în mod explicit, înseamnă că acest tip de zgomot este totdeauna prezent. Deoarece o măsurătoare a lui $N_c - N_a$ este echivalentă cu o determinare mărimii $\langle \delta \bar{I}_1(t')\delta \bar{I}_2(t'-t)\rangle$, ultima va fi caracterizată totdeauna printr-un SNR dat de relația $\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta}}\sqrt{N_a}$, unde S reprezintă valoarea intervalului de timp pentru determinarea mediei, iar T – intervalul de timp pentru determinarea mîrimii *I*.

3.6.7 Parametrul de degenerare.

Intensitatea medie este dată de relația: $\langle \bar{I}\rangle = E_{incid.}A$ unde $E_{incid.}$ - reprezintă densitatea de flux incidentă, iar A - aria suprafeței detectorului proiectată pe un plan perpendicular la fascicul sau, dacă există, aria sistemului de proiecție. Rata medie de detecție a unui singur fotoelectron se poate scrie sub forma:

(3.6 16) $R_1 = \frac{\langle n\rangle}{T} = \frac{1}{T}\frac{\alpha}{h\nu}T\langle \bar{I}\rangle = \frac{\alpha}{h\nu}E_{incid.}A$, α - randamentul cuantic.

Dacă sursa văzută din detector subîntinde un unghi $\Delta\Omega$ și are o radianță totală L_e pentru radiația emisă în direcția detectorului, atunci: $E = L_e\Delta\Omega$. Mărimea $\Delta\Omega$ se poate exprima la detector prin intermediul așa numitei *"arie de coerență"* A_c, prin relația: $A_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega}$. Această relație reprezintă o generalizare *bi*dimensională a noțiunii de lungime de coerență $l_t = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$, caracteristică unei surse cu lărgimea unghiulară $\Delta\theta$. In interiorul ariei de coerență există o corelare bine definită între câmpurile electrice în două puncte ale acesteia.

Deci:

(3.6 17) $$R_1\tau_c = \frac{\alpha}{h\nu}L_e\tau_c\lambda^2\frac{A}{A_c} = \alpha\delta\frac{A}{A_c},$$

unde $\delta = \frac{L_e}{h\nu}\tau_c\lambda^2$ reprezintă *parametrul de degenerare.*

Deoarece L_e reprezintă raportul energiei radiante emisă de sursă în unitatea de timp, pe unitatea de arie și pe unitatea de unghi solid, mărimea δ poate fi interpretată ca numărul mediu de fotoni (cu o polarizare bine determinată) emiși în unitatea de unghi solid în direcția detectorului de la suprafața sursei de arie egală cu λ^2 în intervalul de timp egal cu timpul de coerență τ_c. Deoarece $\lambda^2 = \Delta\Omega A_c$, mărimea δ se poate interpreta ca numărul de fotoni mediu care sosesc la detector pe o suprafață de arie A_c de la toată sursa în intervalul de timp τ_c, sau ca numărul de fotoni care la orice moment dat umplu *"volumul de coerență"* $V_c = A_c\tau_c c$. Pentru radiația monocromatică de echilibru termic la temperatura T, parametrul de degenerare este dat de relația lui Planck:

$$\delta = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT}}-1} \ll 1,$$

iar pentru radiația laser: $\delta \cong 10^{12}$.

4. Starea de polarizare a radiației optice.

Intr-un mediu izotrop și omogen, câmpul *em* poate fi descris ca o suprapunere a undelor plane ale câmpului componentei electrice, respectiv magnetice, ale căror direcții de acțiune sunt reciproc perpendiculare, iar ambele sunt perpendiculare la direcția de propagare. La analiza câmpului *em* se urmărește numai comportarea componentei electrice $\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$, deoarece comportarea componentei magnetice se obține din cea electrică prin intermediul ecuațiilor Maxwell.

4.1 Modele elementare ale radiației polarizate.

Deoarece câmpul electric este reprezentat printr-o *mărime vectorială,* trebuie specificată atât *mărimea* cât și *direcția* acestuia. Particularitățile determinate de direcția de acțiune sunt descrise de *caracteristicile de polarizare* ale câmpului. Dacă considerăm o undă plană caracterizată prin vectorul de undă $\mathbf{k}$, într-un plan perpendicular la direcția $\mathbf{k}$ câmpul electric poate prezenta orice direcție, iar mărimea $\mathbf{b}$ acționează de-a

lungul vectorului $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$. Dacă vectorul: $\mathbf{k} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}\mathbf{k}_0 = \frac{\omega n}{c}\mathbf{k}_0$ este orientat de-a lungul axei z (în continuare se va considera $k_z = k$) şi se consideră un plan (x, y) perpendicular la această direcţie, atunci expresia câmpului armonic este:

(4.1) $$e(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\widetilde{E} e^{i(\omega t - kz)}\right],$$

$\widetilde{E} = \left(\widetilde{E}_x, \widetilde{E}_y, 0\right)$ reprezintă un vector de mărime constantă dispus în planul (x, y), unde $\widetilde{E}_x = E_x e^{i\phi_x}$ şi $\widetilde{E}_y = E_y e^{i\phi_y}$ pot fi mărimi complexe, iar E_x, E_y, ϕ_x şi ϕ_y sunt mărimi pozitive.

În acest caz componentele reale ale câmpului electric, sunt:

$$e_x(x,y,z,t) = E_x \cos(\omega t - kz + \phi_x);$$
$$e_y(x,y,z,t) = E_y \cos(\omega t - kz + \phi_y);$$
$$e_z(x,y,z,t) = 0$$

Tipuri de radiaţie polarizată. Dacă pe direcţia de propagare definită de vectorul $\mathbf{k}$, în planul (x, y) perpendicular în punctul z la această direcţie, acţionează două câmpuri electrice (e_x, e_y), acestea interferă. Se va considera că cele două componente sunt reciproc perpendiculare. Elongaţia vectorului rezultant variază în timp cu pulsaţia ω, în timp ce orientarea şi mărimea amplitudinii depinde de valoarea fazei relative $\phi = \phi_y - \phi_x$, precum şi de valoarea raportului $\frac{E_x}{E_y}$. Pentru a descrie aspectul vectorial al componentei electrice a câmpului *em* se introduc nişte modele care sunt prezentate în continuare.

Radiaţie polarizată eliptic, axele principale ale elipsei fiind diferite de axele de bază (x, y) apare atunci când diferenţa de fază dintre cele două componente este: $\phi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pm\pi$.

Dacă se consideră $\phi_y = \phi_x + \phi$ şi $\theta = \omega t - kz$ se obţine:

(4.2) $$e_x(x,y,z,t) = E_x \cos(\theta + \phi_x), \quad e_y(x,y,z,t) = E_x \cos(\theta + \phi_y).$$

Aceste relaţii pot descrie câmpul electric $e(x,y,z,t)$ ca suprapunerea a două câmpuri polarizate liniar. Mărimea şi direcţia de acţiune a vectorului rezultant evoluează periodic în timp. Vectorul rezultant este dispus în planul (x, y), iar vârful acestuia, într-o

perioadă, descrie o elipsă. Elipsa este înscrisă în interiorul unui dreptunghi cu laturile $2E_x$ şi $2E_y$. Excentricitatea elipsei depinde de diferenţa de fază $\phi = \phi_y - \phi_x$, având valoarea minimă pentru $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, iar cea maximă pentru: $\phi = \pm\pi$. (fig. 25).

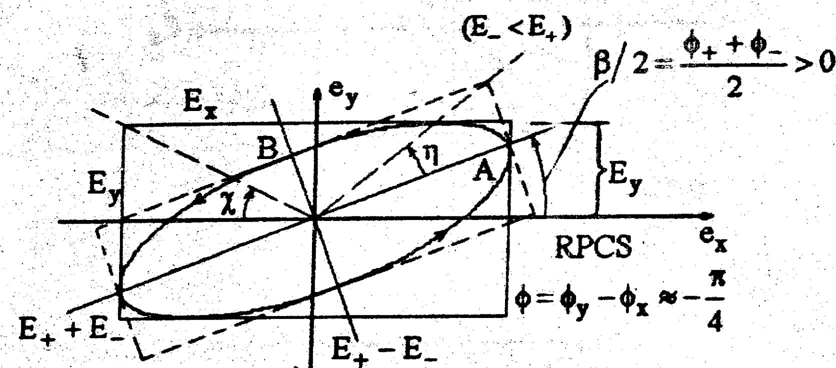


Fig. 25

Dacă se utilizează versori $\hat{i}$, respectiv $\hat{j}$ drept baze de polarizare liniară, atunci se poate scrie:

(4.3) $$e = e_x \hat{i} + e_y \hat{j}.$$

Acest caz general prezintă o serie de cazuri particulare.

Radiaţia polarizată-liniar se obţine dacă $\phi = 0$ sau $\phi = \pi$. Dacă $\phi = 0$, atunci componenta e_y este proporţională cu e_x, adică: $e_y = \frac{E_y}{E_x} e_x$, iar dacă $\phi = \pi$ atunci $e_y = -\frac{E_y}{E_x} e_x$.

Pentru o poziţie dată z, câmpul electric efectuează o mişcare armonică în timp, iar pentru un moment dat t, câmpul prezintă o dependenţă sinusoidală de z, fiind dispus în planul format de axa z şi dreapta: $y = \frac{E_y}{E_x} x$ (oscilaţii în cadranul $1 \leftrightarrow 3$), respectiv $y = -\frac{E_y}{E_x} x$ (oscilaţii în cadranul $2 \leftrightarrow 4$) (fig. 26 a,b).

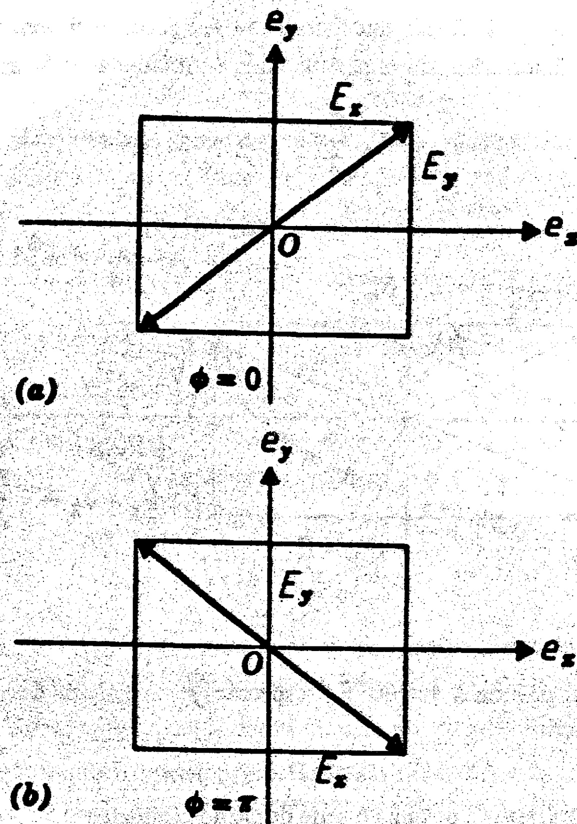


Fig. 26 a,b

Radiație polarizată eliptic, axele principale ale elipsei coincid cu axele de bază (x, y). Dacă $E_x \neq E_y$, dar $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, atunci, în planul (x, y), deplasarea vârfului vectorului rezultant va descrie o elipsă. Componentele de bază sunt:

(4.4 a) $$e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x),$$

(4.4 b) $$e_y(x, y, z, t) = \pm E_y \sin(\omega t - k z + \phi_x),$$

care conduc la:

$$\frac{e_x^2}{E_x^2} + \frac{e_y^2}{E_y^2} = \cos^2(\omega t - k z + \phi_x) + \sin^2(\omega t - k z + \phi_x) = 1.$$

Semiaxele elipsei sunt determinate de mărimile E_x și E_y, fiind orientate de-a lungul direcției x, respectiv y, adică se obține radiație polarizată eliptic, axele principale ale

elipsei fiind chiar axele principale (x, y). In fig. 27 este prezentat, într-un plan (x, y) perpendicular la direcția de propagare a câmpuuli *em*, locul geometric al extremității vectorului câmp electric în cazul a trei diferențe de fază.

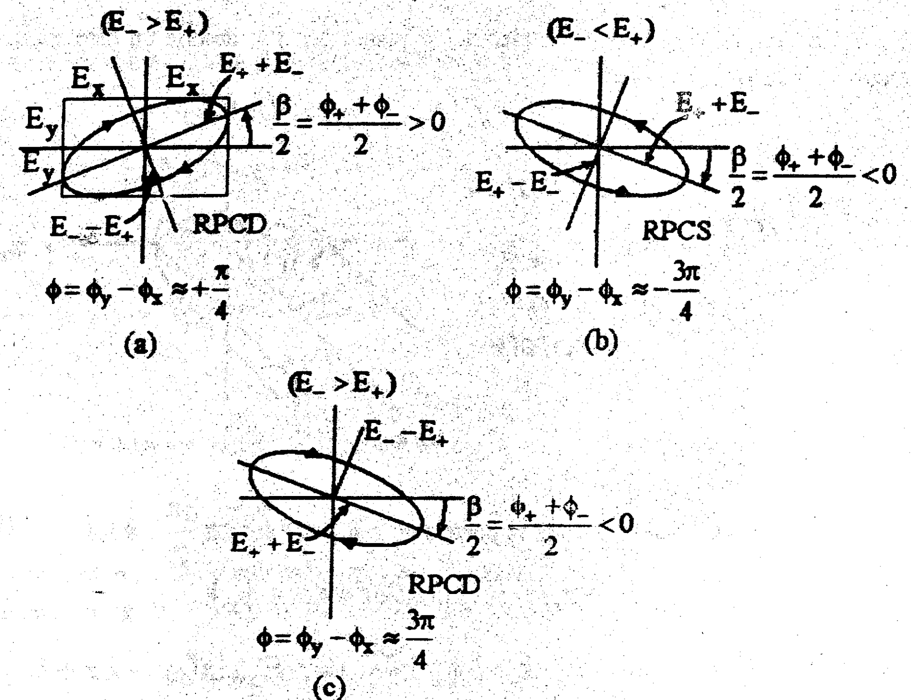


Fig. 27

Dacă: $E_x = E_y$ și $\phi = \phi_y - \phi_x = \pm\frac{\pi}{2}$, expresia componentelor este:

(4.4 a') $$e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x),$$

(4.4 b')

$$e_y(x, y, z, t) = E_x \cos\left(\omega t - k z + \phi_x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp E_x \sin(\omega t - k z + \phi_x).$$

Dacă: $\phi = +\frac{\pi}{2}$, elongația e_y este defazată față de e_x cu $\pi/2$, adică e_y atinge valoarea maximă cu un sfert de cerc înaintea lui e_x. In planul (x, y), extremitatea vectorului câmp electric descrie un cerc în sensul acelor de ceasornic, adică

câmpul electric prezintă "elicitate negativă", ceea ce în optică este cunoscut sub denumirea de *radiație polarizată circular-dreapta* (RPCD).

Dacă: $\phi = -\frac{\pi}{2}$, atunci "elicitatea este pozitivă" (RPCS) – e_y întârzie față de e_x cu un sfert de cerc iar câmpul electric, în planul (x, y), descrie un cerc contrar acelor de ceasornic (fig. 28 a).

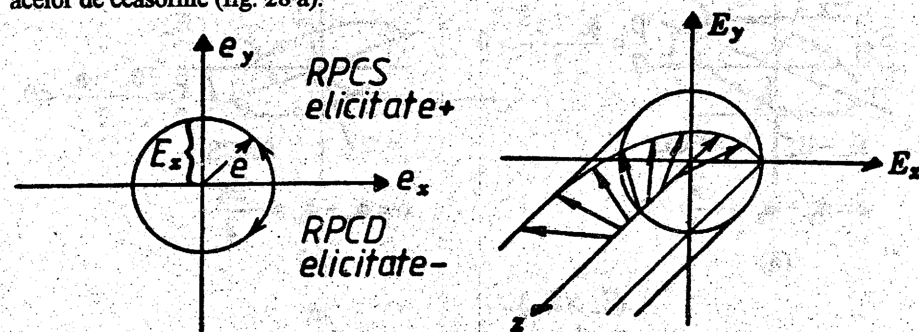


Fig. 28 a,b

Radiație polarizată circular se poate obține și dacă: $\phi = \pm\frac{3\pi}{2}$, adică:

$$e_x(x,y,z,t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x)$$

$$e_y(x,y,z,t) = E_x \cos\left(\omega t - k z + \phi_x \pm \frac{3\pi}{2}\right) = \pm E_x \sin(\omega t - k z + \phi_x).$$

Pentru o valoare fixă a mărimii t, vârful vectorului câmp electric descrie o spirală pe suprafața unui cilindru circular de rază E_x, a cărui axă este dispusă de-a lungul direcției z. Deoarece o creștere a parametrului z este echivalent cu micșorarea fazei: $(\omega t - k z + \phi_x)$, vârful vectorului câmp electric al radiației polarizate circular-dreapta, de-a lungul axei z, va descrie o spirală contrar acelor de ceasornic, iar pentru un moment t fix va apare ca un șurub "pe dreapta".

4.2 Radiația polarizată eliptic reprezentată ca o suprapunere de componente polarizate circular.

Câmpul *em* descris de mărimile e_x și e_y este mai comod să fie exprimat ca o suprapunere de componente polarizate circular-dreapta, respectiv -stânga, decât ca o suprapunere a două componente polarizate liniar de-a lungul axelor x și y. Pentru a descrie componentele polarizate circular se poate utiliza notația complexă.

Componentele (x, y) ale radiației polarizată circular-stânga, elicitate $(+)$, sunt:

(4.5 a) $e_x = E_+ \cos(\theta + \phi_+) = \mathrm{Re}\left(E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta}\right)$, unde: $E_+ > 0$ și $\phi_+ = ct$.

(4.5 b) $e_y = E_+ \sin(\theta + \phi_+) = \mathrm{Im}\left(E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta}\right)$,

iar expresia radiației polarizată circular-stânga este:

(4.6 a) $\tilde{e} = e_x + i\, e_y = E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta}$.

Pentru radiația radiație polarizată circular-dreapta, elicitate $(-)$, se poate scrie:

$$e_x = E_- \cos(\theta - \phi_-) = \mathrm{Re}\left(E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta}\right)$$

$$e_y = -E_- \sin(\theta - \phi_-) = \mathrm{Im}\left(E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta}\right)$$

sau:

(4.6 b) $\tilde{e} = e_x + i\, e_y = E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta}$.

Compunerea radiației cu elicitate pozitivă, respectiv negativă conduce la relația:

(4.7) $\tilde{e} = E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta} + E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta} = a_+ e^{i\theta} + a_- e^{-i\theta}$,

unde: a_+ și a_- sunt coeficienți complecși. Diagrama fazorială pentru acest caz este prezentată în fig. 29.

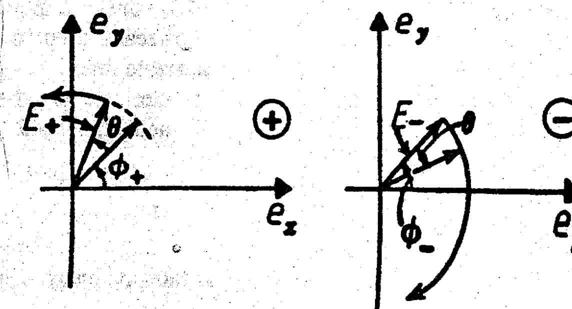


Fig. 29

Pe această bază se obțin relațiile:

$$e_x = E_x \cos(\theta + \phi_x) = \frac{1}{2} E_x e^{i\phi_x} e^{i\theta} + \frac{1}{2} E_x e^{-i\phi_x} e^{-i\theta} =$$

$$= \frac{1}{2} a_x e^{i\theta} + \frac{1}{2} a_x^* e^{-i\theta}$$

$$e_y = E_y \cos(\theta + \phi_y) = \frac{1}{2} E_y e^{i\phi_y} e^{i\theta} + \frac{1}{2} E_y e^{-i\phi_y} e^{-i\theta} =$$

$$= \frac{1}{2} a_y e^{i\theta} + \frac{1}{2} a_y^* e^{-i\theta}$$

Prin urmare:

(4.8) $$\tilde{e} = e_x + i e_y = \frac{1}{2}(a_x + i a_y)e^{i\theta} + \frac{1}{2}(a_x^* + i a_y^*)e^{-i\theta},$$

iar prin identificare cu relaţia (4.7) se obţine:

(4.9 a) $$a_+ = \frac{1}{2}(a_x + i a_y) \text{ şi } a_- = \frac{1}{2}(a_x^* + i a_y^*).$$

Dacă se consideră expresia complex-conjugată: $a_-^* = \frac{1}{2}(a_x - i a_y)$, atunci:

(4.9 b) $$a_x = a_+ + a_-^* \text{ şi } a_y = -i(a_+ - a_-^*).$$

Relaţiile (4.9 a,b) exprimă legătura dintre coeficienţii a_+, a_- şi a_x, a_y. Avantajul utilizării relaţiei (4.7) în loc de relaţia (4.3) constă în interpretarea mai uşoară a caracteristicilor câmpului *em* atunci când se utilizează drept componente de bază componentele polarizate circular în loc de cele polarizate liniar.

Fasciculele polarizate circular pot fi caracterizate printr-un moment cinetic propriu sau spin. Componenta z a momentului cinetic raportată la unitate de volum este:

$$L_z = \pm \frac{w}{\omega},$$

unde semnele (±) marchează elicitatea, w – densitatea de energie *em*, iar ω – pulsaţia câmpului.

4.3 Radiaţia nepolarizată.

Radiaţia nepolarizată nu reprezintă o stare elementară de polarizare. Pentru a analiza această problemă este necesar să descriem, din punct de vedere clasic, structura câmpului *em* emis de către un ansamblu de sisteme emiţătoare elementare.

Radiaţia termică. Sursele de radiaţie optică reprezintă un ansamblu format dintr-un număr foarte mare de sisteme cuantice care pot interacţiona între ele, mărimea

interacţiunii fiind determinată de distanţa dintre sisteme. Interacţiunile cele mai slabe se manifestă în cazul stării gazoase. De aceea, vom considera un ansamblu constituit din cele mai simple sisteme cuantice - atomii - aflat în stare gazoasă.

Sistemele cuantice, prin doua mecanisme mai importante: ciocniri *ne*elastice cu alte particule, respectiv acţiunea unui câmp *em* extern, pot primi din exterior o cantitate de energie, cunoscută sub denumirea de energie de excitare, care determină creşterea energiei interne proprii. Acestea redau mediului extern energia de excitare prin emisie spontană sau prin procese neradiative, sau, dacă procesul are loc sub acţiunea unui câmp *em* extern, prin emisie stimulată.

Să considerăm că ansamblul dispune de energie termică, iar transformarea energiei cinetice de agitaţie termică a atomilor în energie de excitare se realizează prin procesul de ciocniri *ne*elastice, care este un proces aleatoriu, deci se supune legilor statistice. Ca rezultat, în sistemul cuantic se induce un moment de dipol. Valoarea acestuia este determinată de cantitatea de energie cinetică primită în urma ciocnirii, iar orientarea spaţială depinde de direcţia după care are loc ciocnirea.

Dipolii, prin emisie spontană, emit câmpuri *em* optice finite în timp şi spaţiu, caracterizate printr-o singură frecvenţă de bază ν_0 şi un factor de amortizare γ_0. Aceste câmpuri se propagă, fiind localizate între două suprafeţe sferice centrate în emiţător, care expandează în spaţiul-vid cu viteza c. Câmpul electric emis de către dipolul electric liber (neperturbat de cauze externe) reprezintă o undă amortizată, cu durata $\tau_0 \cong 10^{-8}$ sec, căreia îi corespunde o lăţime a structurii spectrale egală cu $\Delta\nu \cong 10^8$ Hz. In acest interval de timp, câmpul electric efectuează $\nu_0\tau_0 \cong 10^7$ oscilaţii complete, amplitudinea acestora micşorându-se în timp după o lege exponenţială. Lungimea asociată acestei unde amortizate este: $\Delta L \cong c\tau_0 = 3\,\text{m}$.

In timpul procesului de emisie, dipolul este perturbat prin ciocniri atât elastice cât şi *ne*elastice cu alţi dipoli ai ansamblului. Ca rezultat, se modifică mărimea momentului de dipol (p_0), direcţia acestuia, precum şi faza oscilaţiei faţă de faza anterioară ciocnirii. In acest mod, procesul de emisie al dipolului este fragmentat, durata fiecărui fragment corespunde intervalului de timp dintre două ciocniri. Acesta este o mărime aleatoare, fiind determinată de mărimea drumului liber al sistemelor. Valoarea amplitudinii semnalului va depinde de valoarea amplitudinii momentului de dipol (p_0) şi de mărimea unghiului θ dintre direcţia momentului de dipol şi direcţia de observaţie, mărimi care variază în mod aleator, deorece valoarea lor este determinată de procesele de ciocniri dintre dipoli. Dacă $\tau_0 \cong 10^{-11}$ s, atunci lungimea medie a semnalului este: $\Delta L \cong c\tau_0 = 3\,\text{cm}$. Prin urmare, într-un punct al spaţiului prin care trece acest grup de unde, acţiunea lui durează 10^{-11} s, iar componenta electrică efectuează 10^4 oscilaţii complete.

Să considerăm un volum ΔV foarte mic ocupat de ansamblul de sisteme atomice (dipoli electrici) care formează sursa de radiaţie (aprox. de dipol electric) şi un

sistem de coordonate cu originea localizată în acest volum (fig. 30). Să determinăm acțiunea componentei electrice într-un punct $M(\mathbf{R})$, situat la distanță mare față de dimensiunile volumului ocupat de ansamblu. În acest punct considerăm un plan (xy), perpendicular la direcția vectorului $\mathbf{R}$. Deoarece distanța R este mare față de dimensiunile ansamblului, direcțiile vectorilor intensitate câmp electric, create de dipolii ansamblului, pot fi considerate coplanare cu planul (xy) (unghiurile β_m formate de vectorii $\mathbf{R}_m$ cu vectorul $\mathbf{R}$ sunt foarte mici).

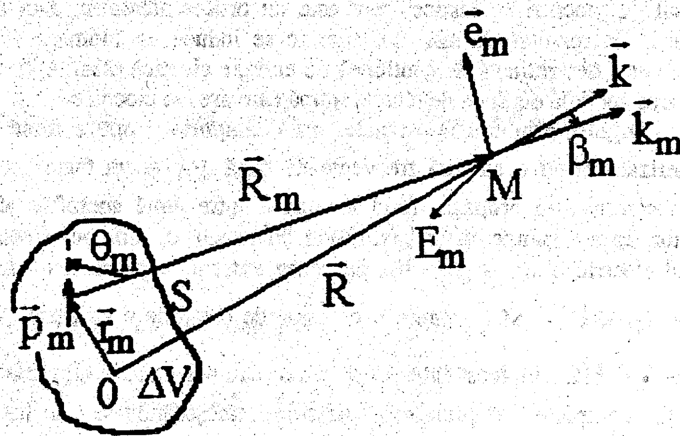


Fig. 30

Dacă $\hat{i}$ și $\hat{j}$ reprezintă versorii direcțiilor Mx și My, iar α_m unghiul format de direcția de acțiune a câmpului electric creat de dipolul m cu direcția Mx, atunci intensitatea e_m a câmpului electric al unui semnal individual poate fi scrisă sub forma:

$$e_m = e_{mx}\hat{i} + e_{my}\hat{j} = (e_m \cos\alpha_m)\hat{i} + (e_m \sin\alpha_m)\hat{j},$$

unde e_m este dat de relația (I 4.10).

La un moment dat, în punctul $M(\mathbf{R})$ acționează N semnale emise de către dipolii electrici ai ansamblului, deci componentele intensității câmpului electric total vor fi:

(4.10) $$e_x(\mathbf{R},t) = \sum_{m=1}^{N} e_{mx} \text{ și } e_y(\mathbf{R},t) = \sum_{m=1}^{N} e_{my}.$$

Mărimile $e_x(\mathbf{R},t)$ și $e_y(\mathbf{R},t)$, odată cu scurgerea timpului, prezintă, una față de alta, valori aleatoare independente. Această comportare este determinată de valorile

aleatoare ale mărimilor p_m, θ_m, r_m și φ_m, iar independența lor este determinată de faptul că unghiul α_m prezintă valori aleatoare în timp.

La calculul câmpului electric rezultat din suprapunerea câmpurilor individuale fragmentate trebuie analizată atât *mărimea* cât și *direcția de acțiune* a acestuia. La un moment dat, într-un punct dat al spațiului, se compun un număr foarte mare de câmpuri individuale fragmentate.

1. *Direcția de acțiune* a câmpului rezultant este determinată de direcția de acțiune a câmpului semnalelor individuale, care sunt polarizate liniar, precum și de faza acestora. Direcția de acțiune individuală este determinată de orientarea momentului de dipol în timpul procesului de emisie, iar faza este determinată de procesul de ciocniri.

Orientarea spațială a momentului de dipol este fixată de structura unității de volum a sursei emițătoare. Dacă sursa de radiație prezintă o structură cristalină, atunci direcția dipolilor electrici în sursă este fixă ceea ce determină o orientare fixă a direcției de acțiune a câmpurilor în fragmentele individuale, care conduce la o anumită stare de polarizare a radiației totale emise. Dacă ansamblul emițător nu prezintă structură cristalină atunci emițătorii elementari își pot modifica în mod aleator orientarea momentului de dipol, ceea ce se evidențiază în starea de polarizare a radiației emisă.

Rezultatul compunerii câmpurilor elementare poate fi analizat din două puncte de vedere.

a) La un moment dat, în planul (xy), trebuie calculată rezultanta câmpurilor electrice fragmentate, care sunt polarizate liniar, dar a căror orientare, dacă numărul de dipoli din sursă este foarte mare (este îndeplinită condiția teoremei limită), este dirijată aleator cu egală probabilitate în unghiul plan $(0 \div 2\pi)\,\text{rad}$. O anumită distribuție a orientărilor se păstrează un interval de timp foarte mic, determinat de timpul de corelare al fragmentelor individuale. La momentul următor, în punctul considerat, o parte din semnale au depășit acest punct, iar altă parte sosesc. Din această cauză semnalul rezultant își modifică în mod aleator orientarea în unghiul plan $(0 \div 2\pi)\,\text{rad}$ (fig. 31).

Dacă într-un asemenea fascicul se introduce un filtru de polarizare, acesta, de-a lungul direcției de transmisie maximă, va transmite numai proiecțiile câmpului electric dispuse după această direcție. Un receptor de radiație așezat după filtru, în intervalul de timp de măsură caracteristic receptorului, va înregistra rezultanta câmpurilor transmise de acesta. Atât amplitudinea cât și faza câmpului rezultant vor depinde de timp în mod aleator. Aceeași situație se va înregistra și într-un plan perpendicular la direcția considerată. Deoarece determinarea stării de polarizare a radiației se face în intervalul de măsură al detectorului, care este mult mai mare decât intervalul de timp al modificărilor aleatoare, acesta va înregistra un semnal care sugerează o orientare, cu egală probabilitate, a câmpului electric în toate direcțiile unghiului plan $(0 \div 2\pi)\,\text{rad}$. Acest tip de radiație este cunoscut sub denumirea de *radiație nepolarizată*.

b) Deoarece în planul (xy) numărul de semnale individuale este foarte mare, după direcțiile Mx, respectiv My, totdeauna există două câmpuri (sau proiecții ale acestora) orientate după direcții reciproc perpendiculare și care au între ele o anumită diferență de fază. Compunerea acestora va conduce la radiație polarizată eliptic.

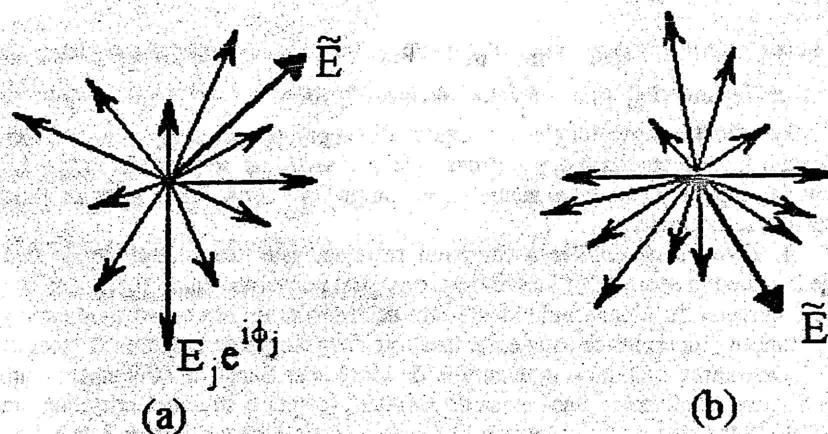


Fig. 31

Suprapunerea a două *fascicule coerente* de radiație polarizată eliptic conduce la un fascicul polarizat de asemenea eliptic, dar cu alți parametrii ai elipsei. Aspectul elipsei rezultante depinde atât de diferența de fază a fasciculelor primare cât și de valoarea amplitudinilor componentelor de bază. Dacă diferență de fază variază, atunci elipsa își modifică orientarea și forma. Dacă *durata de coerență* a celor două fascicule este finită, atunci diferența de fază se modifică în mod aleator.

In fasciculul considerat mai sus forma și orientarea elipsei este stabilă numai în intervalul de timp de corelare dintre cele două câmpuri. Simultan cu exemplul considerat există un număr foarte mare de câmpuri-perechi care vor conduce la alte forme și tipuri de elipse, dar necorelate între ele.

Dacă *timpul de măsură* al receptorului este mai mare decât *durata de coerență*, poziția elipsei rezultante se va modifica rapid, în mod aleator, fiind măsurabile numai valorile și proprietățile medii, adică radiația înregistrată este *nepolarizată*.

2. Pentru a analiza *mărimea* câmpului *em* al radiației optice este comod să se utilizeze forma analitică a semnalului, semnalul real reprezentând partea reală a semnalului complex.

Dacă volumul ΔV este foarte mic, atunci pentru toți dipolii sursei este îndeplinită condiția $\mathbf{R}_m \cong \mathbf{R}$, iar relațiile (4.10) devin:

$$\tilde{e}_x(\mathbf{R},t)=\frac{\tilde{E}_x}{R}e^{i(\omega_0 t-kR)};\ \text{și}\ \tilde{e}_y(\mathbf{R},t)=\frac{\tilde{E}_y}{R}e^{i(\omega_0 t-kR)},$$

unde E_x și E_y sunt mărimi aleatoare independente. Pentru valori mari ale distanței $\mathbf{R}$, într-un domeniu mic centrat în jurul punctului $M(\mathbf{R})$, amplitudinea câmpului se poate considera independentă de $\mathbf{R}$, componentele având forma:

$$\tilde{e}_x(\mathbf{R},t)=\tilde{E}_x\, e^{i(\omega_0 t-kR)}\ \text{și}\ \tilde{e}_y(\mathbf{R},t)=\tilde{E}_y\, e^{i(\omega_0 t-kR)}.$$

Deoarece componentele E_x și E_y sunt mărimi a căror valoare este lent-variabilă în timp față de funcția exponențială, la analiza unor fenomene optice, acestea pot fi considerate constante. Fazele inițiale ale grupurilor de unde sunt conținute în mărimile $\tilde{E}_x$ și $\tilde{E}_y$.

Pentru o sursă individuală (dipol electric) expresia semnalului analitic este:

$$e_j = E_j e^{i\phi_j} e^{i\omega_0 t} = \tilde{E}_j e^{i\omega_0 t},$$

iar forma semnalului analitic total obținut de la sursa punctiformă este:

$$e=\sum_j e_j=\left(\sum_j E_j e^{i\phi_j}\right)e^{i\omega_0 t}=\tilde{E}e^{i\omega_0 t}.$$

Partea reală a semnalului analitic reprezintă semnalul real total:

$$e^{(r)}=\mathrm{Re}\left[\tilde{E}e^{i\omega_0 t}\right]=\mathrm{Re}\left[\left(\sum_j E_j e^{i\phi_j}\right)e^{i\omega_0 t}\right],$$

unde sumarea este extinsă asupra tuturor dipolilor ansamblului. Conform teoremei centrale limită, deoarece numărul de dipoli este foarte mare, mărimea $\tilde{E}$ reprezintă un proces aleator gaussian. Deoarece mărimile E_j și ϕ_j variază aleator de la un dipol la altul, iar între fazele ϕ_j ale contribuțiilor elementare nu există corelație de fază, acestea pot fi considerate mărimi statistic independente și omogen distribuite în intervalul $(-\pi \div +\pi)$. Partea reală și imaginară a funcțiilor e_m reprezintă *funcții complet independente, variabile aleatorii gaussiene omogen distribuite*, deci cu *valoare medie* egală cu zero.

Fazorul rezultant $\tilde{E}$, la un moment dat, poate fi obținut prin metoda compunerii fazoriale a lui Fresnel. El va fi caracterizată printr-o anumită amplitudine și fază. La momentul următor, datorită proceselor întâmplătoare de emisie, amplitudinea și faza se vor modifica aleator. Pentru o sursă staționară, deși numărul mediu de oscilatori este constant, mărimile E și ϕ sunt dependente de timp în mod aleator. (Pentru câmpul de radiație optică emis de către surse care îndeplinesc condiția de surse punctiforme, noțiunea de fază inițială nu mai are sens)

Expresia elongației câmpului va fi de forma:

$$e(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cos[\omega t+\phi(t)].$$

Intervalul de timp după care apare o variație importantă a fluctuației amplitudinii și fazei, reprezintă *timpul de coerență* și are aproximativ aceeași valoare ca și durata radiației emise de un oscilator individual. *Deoarece faza oscilației rezultante*

depinde în mod aleator de timp are ca rezultat faptul că valoarea frecvenței oscilației este definită în intervalul de frecvențe $\Delta\omega$ *al lățimii spectrale al semnalului.*

Acest tip de radiație, constituit dintr-un număr mare de contribuții elementare, independente una de alta, este cunoscut sub denumirea generală de *radiație termică* sau *radiație de tip Gauss*. Opusul radiației termice este reprezentat de radiația emisă de către ansamblul de sisteme atomice dispus într-un *rezonator optic*, obținută ca rezultat al *emisiei stimulate*. Datorită acțiunii rezonatorului și a fenomenului de emisie stimulată, contribuțiile elementare la radiația totală apar ordonate și dependente unele de altele. Însă, ambele tipuri de radiație sunt constituite din aceste "contribuții elementare", care prezinta fluctuații aleatoare în timp, deci trebuie privite ca procese aleatoare.

Densitatea de flux a câmpului electromagnetic în vecinătatea unui punct, utilizând relația (4.10), se poate exprima prin relația:

(4.11)
$$\varphi(\mathbf{R},t)=\frac{1}{c\mu_0}\left\langle e\cdot e^*\right\rangle=\frac{1}{c\mu_0}\left[\left\langle\left(e_x\hat{i}+e_y\hat{j}\right)\left(e_x\hat{i}+e_y\hat{j}\right)\right\rangle\right]=$$
$$=\frac{1}{c\mu_0}\left[\left\langle e_x^2\right\rangle+\left\langle e_y^2\right\rangle+2\left\langle e_x e_y\right\rangle\left(\hat{i}\cdot\hat{j}\right)\right]=\varphi_x(\mathbf{R},t)+\varphi_y(\mathbf{R},t),$$

adică, dacă există două câmpuri *em* ortogonale în fiecare punct din spațiu, densitatea totală de flux a radiației termice este egală cu suma densităților de flux a câmpurilor componente. Această proprietate permite evaluarea distribuției spațiale a energiei câmpului *em* urmărind evoluția unei singure componente. De aceea la evaluarea rezultatelor acțiunii câmpului *em*, intensitatea câmpului electric poate fi exprimată printr-o funcție scalară în loc de una vectorială.

Densitatea de flux corespunzătoare unei componente, utilizând relațiile (4.10), poate fi scrisă sub forma:

(4.12)
$$\varphi_x(\mathbf{R},t)=\frac{1}{c\mu_0}\left\langle e_x^2\right\rangle=$$
$$=\frac{1}{c\mu_0}\left\langle\left(\sum_{m=1}^{N}e_{mx}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}e_{nx}\right)\right\rangle=\frac{1}{c\mu_0}\left[\sum_{m=1}^{N}\left\langle e_{mx}\right\rangle\right]=\sum_{m=1}^{N}\varphi_{mx}$$

iar relația (4.11) devine:

$$\varphi(\mathbf{R},t)=\varphi_x(\mathbf{R},t)+\varphi_x(\mathbf{R},t)=\sum_{m=1}^{N}\varphi_{mx}+\sum_{m=1}^{N}\varphi_{my}=\sum_{m=1}^{N}\varphi_m,$$

adică densitatea de flux în vecinătatea unui punct din spațiul de propagare a radiației optice monocromatice este egală cu suma densităților de flux determinate de fiecare grup de unde care acționează în vecinătatea acelui punct, proprietate determinată de faptul că grupurile de undă sunt generate independent unul față de altul. Densitatea totală de flux conține aceleași informații relativ la câmpul *em* ca și densitățile de flux ale grupurilor de unde care compun radiația optică monocromatică. De ex., compoziția spectrală a radiației monocromatice emisă de sursa optică este asemănătoare cu compoziția spectrală a grupurilor de unde. Determinând experimental *semilățimea*

spectrală $\Delta\nu_0$ a radiației se poate aprecia durata grupurilor de unde care compun radiația optică.

In prezența unor asemenea fascicule necoerente, se obține radiație nepolarizată dacă este satisfăcută următoarea condiție. Considerăm două câmpuri necoerente și reciproc perpendiculare e_x și e_y ale căror medii ale amplitudinilor sunt egale în timp: $\left\langle E_x^2\right\rangle=\left\langle E_y^2\right\rangle$. Intensitatea totală este: $I\approx\left\langle E^2\right\rangle=\left\langle E_x^2\right\rangle+\left\langle E_y^2\right\rangle$, unde fiecărei componente îi corespunde jumătate din valoarea intensității. Deoarece sistemul de coordonate este arbitrar, un polarizor introdus în fascicul, independent de orientarea lui, transmite jumătate din valoarea intensității.

Dacă considerăm drept *direcții de bază* radiația polarizată circular, se poate efectua o tratare asemănătoare cu cea de mai sus; mărimile:

$$e_+=a_+e^{i\theta}\ \text{și}\ e_-=a_-e^{-i\theta}$$

trebuie să fie necoerente (necorelate), deci trebuie să existe relația: $\left\langle|a_+|^2\right\rangle=\left\langle|a_-|^2\right\rangle$.

Însă dacă se suprapun câteva fascicule necoerente, fiecare în aceeași stare de polarizare totală, fasciculul rezultant de asemenea va fi complet polarizat. Considerăm un *sistem de bază polarizat liniar*. Să considerăm că fiecare componentă prezintă aceeași valoare a diferenței de fază $\phi=\phi_y-\phi_x$ și aceeași valoare a raportului $r=\frac{E_y}{E_x}$. Pentru un fascicul j se poate scrie:

$$e_{xj}=E_{xj}e^{i\phi_{xj}}e^{i\theta},\ \text{respectiv:}$$
$$e_{yj}=E_{yj}e^{i\phi_{yj}}e^{i\theta}=rE_{xj}e^{i(\phi+\phi_{xj})}e^{i\theta}=re^{i\phi}e_{xj}.$$

Deci componentele câmpului rezultant sunt:

(4.13 a)
$$e_{x_{total}}=\sum_j E_{xj}e^{i\phi_{xj}}e^{i\theta},$$

(4.13 b)
$$e_{y_{total}}=\sum_j e_{yj}=re^{i\phi}\sum_j e_{xj}=re^{i\phi}e_{x_{total}}.$$

Chiar dacă valoarea fazelor individuale ϕ_{xj} și a amplitudilor A_{xj} fluctuează, radiația se va afla într-o stare de polarizare pură descrisă de mărimile r și ϕ.

Radiația parțial polarizată reprezintă amestecul radiației unui fascicul aflată într-o stare de polarizare pură cu radiația nepolarizată a altui fascicul. Această

descompunere este unică. Ea depinde de coerenţa mutuală a câmpului electric, care oscilează de-a lungul a două direcţii reciproc perpendiculare.

4.4 Măsurători elementare asupra stării de polarizare a unui fascicul de radiaţie optică.

1 – *Intensitatea unui fascicul transmis printr-un polarizor*. Considerăm un polarizor a cărui axă de transmisie maximă este înclinată cu unghiul α faţă de axa x. Dacă e_x, respectiv e_y reprezintă componentele carteziene ale câmpului electric, mărimea câmpului transmis de polarizor reprezintă suma proiecţiilor componentelor câmpului pe direcţia de transmisie maximă a polarizorului:

(4.14 a) $$e(\alpha) = e_x \cos\alpha + e_y \sin\alpha,$$

iar intensitatea transmisă este:

(4.14 b) $$\left\langle e(\alpha)^2 \right\rangle = \left\langle e_x^2 \right\rangle \cos^2\alpha + \left\langle e_y^2 \right\rangle \sin^2\alpha + 2\left\langle e_x \cdot e_y \right\rangle \sin\alpha\cos\alpha.$$

Dacă funcţia de corelare este egală cu zero $\left\langle e_x \cdot e_y \right\rangle = 0$, atunci intensităţile asociate direcţiilor x, respectiv y se adună. Această situaţie poate apare dacă sunt îndeplinite ambele sau una din următoarele condiţii:

- mărimile e_x şi e_y nu prezintă corelare mutuală;
- mărimile e_x şi e_y sunt corelate, însă prezintă între ele o diferenţă de fază egală cu $\pi/2$ rad.

Dacă există relaţia $\left\langle e_x \cdot e_y \right\rangle \neq 0$, între componente există corelare, dar pe baza relaţiei (4.14 b) aceasta nu poate fi determinată în mod univoc. Pentru a caracteriza radiaţia în mod univoc, este necesar să se introducă o diferenţă de fază suplimentară, apoi fasciculul trebuie transmis printr-un polarizor ce se roteşte. Deoarece modificarea fazei de către compensatorul de polarizare (dispozitiv care modifică faza oscilaţiilor după direcţiile x, respectiv y), depinde de lungimea de undă, trebuie să se considere radiaţii armonice, deci semnale analitice:

$$e_x(t) = E_x \cos(\omega t + \phi_x) = \mathrm{Re}[\tilde{e}_x(t)] = \mathrm{Re}\left[E_x e^{i\phi_x} e^{i\omega t}\right]$$
$$e_y(t) = E_y \cos(\omega t + \phi_y) = \mathrm{Re}[\tilde{e}_y(t)] = \mathrm{Re}\left[E_y e^{i\phi_y} e^{i\omega t}\right],$$

unde E_x şi ϕ_x – amplitudinea şi faza sunt funcţii lent-dependente de timp faţă de variaţiile mărimii $\cos\omega t$. Densitatea de flux este proporţională cu:

(4.15) $$\left\langle e_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle E_x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \tilde{E}_x \cdot \tilde{E}_x^* \right\rangle.$$

Pentru câmpul transmis de polarizor se poate scrie:

(4.15 a) $$\tilde{e}(\alpha) = \tilde{e}_x \cos\alpha + \tilde{e}_y \sin\alpha,$$

iar densitatea spectrală de flux este:

(4.15 b)
$$\frac{\varphi(\alpha)}{2} = \frac{\left\langle \tilde{e}(\alpha)\tilde{e}(\alpha)^* \right\rangle}{2} =$$
$$= \frac{\left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_x^* \right\rangle}{2}\cos^2\alpha + \frac{\left\langle \tilde{e}_y\tilde{e}_y^* \right\rangle}{2}\sin^2\alpha + \frac{\left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_y^* \right\rangle + \left\langle \tilde{e}_x^*\tilde{e}_y \right\rangle}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

Compensator plus polarizor. Compensatorul este introdus înaintea polarizorului, astfel încât faza componentei y este deplasată de la valoarea ϕ_y la $\phi_y - \delta + \varepsilon$, iar faza componentei x, de la valoarea ϕ_x la $\phi_x + \varepsilon$. Expresiile componentelor câmpului electric sunt:

$$E_x e^{i\phi_x} e^{i(\omega t + \varepsilon)} = e^{i\varepsilon}\tilde{e}_x$$
$$E_y e^{i(\phi_y - \delta)} e^{i(\omega t + \varepsilon)} = e^{-i(\delta - \varepsilon)}\tilde{e}_y.$$

Expresia semnalului transmis prin polarizorul dispus sub unghi α este:

(4.16 a) $$\tilde{e}(\alpha, \delta) = \left(\tilde{e}_x \cos\alpha + e^{-i\delta}\tilde{e}_y \sin\alpha\right)e^{i\varepsilon},$$

iar expresia desităţii de flux:

(4.16 b) $$\frac{I(\alpha,\delta)}{2} = \frac{1}{2}\left\{\left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_x^* \right\rangle \cos^2\alpha + \left\langle \tilde{e}_y\tilde{e}_y^* \right\rangle \sin^2\alpha + \right.$$
$$\left. + \left[\left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_y^* \right\rangle e^{i\delta} + \left\langle \tilde{e}_x^*\tilde{e}_y \right\rangle e^{-i\delta}\right]\sin\alpha\cos\alpha\right\}$$

depinde de variaţia fazei $(-\delta)$ a componentelor e_x şi e_y determinată de compensator, şi nu depinde de variaţia comună de fază (ε).

4.5 Matricea de coerenţă.

In relaţia (4.16 b) au fost introduse patru valori medii:

(4.17) $$J_{xx} = \left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_x^* \right\rangle;\ J_{xy} = \left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_y^* \right\rangle,\ J_{yx}^* = \left\langle \tilde{e}_y\tilde{e}_x^* \right\rangle^* = \left\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_y^* \right\rangle = J_{xy}$$
$$J_{yx} = \left\langle \tilde{e}_x^*\tilde{e}_y \right\rangle;\quad J_{yy} = \left\langle \tilde{e}_y\tilde{e}_y^* \right\rangle,$$

care reprezintă elementele unei matrici de tip hermitic, cunoscută sub denumirea de *matrice de coerenţă*:

(4.18 a)
$$[J]=\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix},$$

deoarece sunt îndeplinite condițiile:

$$J_{xx}=J^*_{xx}=\langle \tilde{e}_x\tilde{e}^*_x\rangle;\ J_{yy}=J^*_{yy} \text{ și } J^*_{xy}=J_{yx}.$$

Folosind elementele de matrice, relația (4.16 b) poate fi scrisă sub forma:

(4.19)
$$I(\alpha,\delta)=J_{xx}\cos^2\alpha+J_{yy}\sin^2\alpha+\left(J_{xy}e^{i\delta}+J_{yx}e^{-i\delta}\right)\sin\alpha\cos\alpha=$$
$$=J_{xx}\cos^2\alpha+J_{yy}\sin^2\alpha+2|J_{xy}|\sin\alpha\cos\alpha\cos(\delta-\phi)$$

unde s-a considerat:

$$J_{xy}=\langle \tilde{e}_x\tilde{e}_y\rangle=\left\langle E_x e^{i\phi_x}e^{i\omega t}E_y e^{-i\phi_y}e^{-i\omega t}\right\rangle=|J_{xy}|e^{-i\phi}, \text{ respectiv}$$
$$J_{yx}=|J_{xy}|e^{i\phi}, \text{ iar: } \phi=\phi_y-\phi_x.$$

Dacă se efectuează medierea relației (4.19) după toate unghiurile α, se obține:

$$\langle I(\alpha,\delta)\rangle_\alpha=\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy}),$$

unde:

(4.20) $$\varphi_0=J_{xx}+J_{yy}=\varphi(\alpha,\delta)+\varphi\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2},\delta\right)=\text{Tr}J \text{ (urma matricii)}.$$

Mărimile: $J_{xx}\equiv\varphi(0,\delta)$, $J_{yy}\equiv\varphi\left(\frac{\pi}{2},\delta\right)$ pot fi măsurate pentru două poziții reciproc perpendiculare ale polarizorului.

Natura polarizării radiației este independentă de intensitatea energetică inițială φ_0, ea depinde numai de raportul elementelor de matrice J_{ij}. De aceea se introduce noțiunea de *matrice de coerență redusă*: $[j]=\frac{[J]}{\varphi_0}$, caracterizată prin elementele de matrice: $j_{xx}=\frac{J_{xx}}{\varphi_0}$, deci: $\text{Tr}[j]=1$.

4.5.1 Determinarea valorii elementelor matricii de coerență.

Deoarece: $J_{xy}=J^*_{yx}=|J_{xy}|e^{-i\phi}$, pentru a stabili expresia matricii J este necesar să se cunoască patru mărimi reale independente J_{xx}, J_{yy}, $|J_{xy}|$ și ϕ, care pot fi determinate dacă se efectuează patru măsurători asupra densității de flux a fasciculului utilizând un polarizor și un compensator:

1. - dacă polarizorul este dispus cu axa de transmisie maximă de-a lungul axei x, se determină mărimea:

(4.21 a) $$\varphi(0,\delta)\equiv J_{xx};$$

2. - dacă polarizorul este dispus cu axa de transmisie maximă de-a lungul axei y, se determină mărimea:

(4.21 b) $$\varphi\left(\frac{\pi}{2},\delta\right)=J_{yy};$$

3. - dacă polarizorul este dispus la 45^o față de axa x, se determină mărimea:

(4.21 c)
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\frac{1}{2}\left(J_{xx}+J_{yy}+J_{xy}+J_{yx}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(J_{xx}+J_{yy}\right)+\frac{1}{2}\left(J_{xy}+J_{yx}\right)=\frac{1}{2}\left(J_{xx}+J_{yy}\right)+\frac{1}{2}\text{Re}J_{xy};$$

4. - o lamă sfert de lungime de undă cu axa rapidă de-a lungul direcției x $\left(\delta=\frac{\pi}{2}\right)$ urmată de un polarizor dispus la 45^o față de această axă, permite determinarea mărimii:

(4.21 d) $$\varphi\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[J_{xx}+J_{yy}+i\left(J_{xy}-J_{yx}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(J_{xx}+J_{yy}\right)-\text{Im}J_{xy}.$$

Pe baza acestor măsurători se poate deduce valoarea mărimilor:

$$J_{xx};\ J_{yy};\ \text{Re}J_{xy}=|J_{xy}|\cos\phi;\ \text{Im}J_{xy}=|J_{xy}|\sin\phi.$$

4.6 Expresia matricii de coerență pentru câteva tipuri de radiație optică polarizată.

Radiație polarizată liniear. Dacă $\tilde{E}_0$ reprezintă fazorul câmpului inițial de radiație, atunci componentele vectorului E_0, orientat sub unghi α_0 față de axa x sunt (fig. 32):

$$\tilde{e}_x=\tilde{E}_0\cos\alpha_0 \text{ și } \tilde{e}_y=\tilde{E}_0\sin\alpha_0.$$

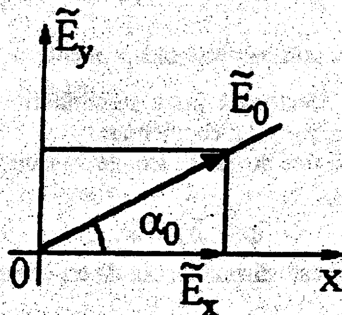


Fig. 32

Dacă direcţia de transmisie maximă a unui polarizor este orientată sub unghiul $\pm\alpha_0$, valoarea intensităţii transmise $\varphi_0 = \left\langle \tilde{E}_0 \tilde{E}_0^{\,*} \right\rangle$, este egală cu cea a intensităţii fasciculului incident. Dacă direcţia de transmisie maximă este orientată sub unghiul $\alpha = \pm\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}$, atunci valoarea intensităţii transmise este egală cu zero.

In cazuri intermediare, valoarea elementelor de matrice ce apar în relaţia (4.17) este:

$$J_{xx} = \varphi_0 \cos^2\alpha_0;\ J_{yy} = \varphi_0 \sin^2\alpha_0;\ J_{xy} = J_{yx} = \varphi_0 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 .$$

Dacă în relaţia (4.19) se consideră deplasarea fazei $\delta = 0$, atunci se obţine:

$$\varphi(\alpha,0) =$$
$$= \varphi_0\left(\cos^2\alpha\cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha\sin^2\alpha_0 + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha_0\cos\alpha_0\right) =$$
$$= \varphi_0\cos^2(\alpha-\alpha_0)$$

relaţie ce reprezintă *legea lui Malus.*

Matricea de coerenţă are expresia:

$$[J_{\alpha_0}] = \varphi_0\begin{bmatrix} \cos^2\alpha_0 & \sin\alpha_0\cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0\cos\alpha_0 & \sin^2\alpha_0 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

care în cazuri particulare devine:

$$[J_{0^\circ}] = \varphi_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ [J_{90^\circ}] = \varphi_0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ [J_{45^\circ}] = \frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Radiaţie polarizată circular. In acest caz există relaţiile:

$$E_x = E_y ,$$

$$\phi = \phi_y - \phi_x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{RPCS – elicitate } (+) \text{ sau:}$$

$$\phi = \phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2} \quad \text{RPCD – elicitate } (-).$$

Deci:
$$J_{xx} = J_{yy} = \left\langle E_x^2 \right\rangle$$

$$J_{xy} = \left\langle E_x^2 \right\rangle e^{i(\phi_y-\phi_x)} = \left\langle E_x^2 \right\rangle e^{i\frac{\pi}{2}} = i\left\langle E_x^2 \right\rangle = -J_{yx} \text{ (RPCS)}$$

$$J_{xy} = -J_{yx} = -i\left\langle E_x^2 \right\rangle \text{ (RPCD)}$$

Dacă radiaţia polarizată circular este transmisă printr-o lamă $\frac{\lambda}{4}$, cu axa optică orientată de-a lungul axei x sau y, se obţine radiaţie polarizată liniar sub unghiul $\alpha_0 = \pm\frac{\pi}{4}$, caracterizată prin matricea de coerenţă (pentru $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$):

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xx} \\ J_{xx} & J_{xx} \end{bmatrix}.$$

Intensitatea maximă $\varphi_0 = 2J_{xy}$ se obţine dacă $\alpha = \alpha_0$. De unde: $J_{xy} = \frac{\varphi_0}{2} = \left\langle E_x^2 \right\rangle$, iar matricea de coerenţă a radiaţiei iniţiale este:

$$[J_{RPCS}] = \frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } [J_{RPCD}] = \frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

Radiaţie polarizată eliptic. In acest caz există relaţiile:

$$\tilde{e}_x = E_x e^{i\phi_x} e^{i\omega t} \text{ şi } \tilde{e}_y = E_y e^{i\phi_y} e^{i\omega t},$$

unde mărimea raportului $r = \frac{E_y}{E_x}$ şi a diferenţei de fază $\phi = \phi_y - \phi_x$ sunt constante. Expresia intensităţii totale (4.20) este:

$$\varphi_0 = J_{xx} + J_{yy} = \left\langle E_x^2 \right\rangle + \left\langle E_y^2 \right\rangle$$

Dacă se defineşte unghiul γ astfel încât: $\tan\gamma = \frac{E_y}{E_x}$, se obţin relaţiile:

$$E_y = E_x \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma};\ \varphi_0 = \frac{\langle E_x^2 \rangle}{\cos^2\gamma};$$

$$J_{xx} = \langle e_x e_x^* \rangle = \langle E_x^2 \rangle = \varphi_0 \cos^2\gamma;$$

$$J_{yy} = \langle e_y e_y^* \rangle = \langle E_y^2 \rangle = \varphi_0 \sin^2\gamma;$$

$$J_{yx} = \langle e_y e_x^* \rangle = \langle E_y e^{i\phi_y} E_x e^{-i\phi_x} \rangle = \varphi_0 e^{i(\phi_y - \phi_x)} \sin\gamma\cos\gamma,$$

forma matricii de coerenţă, care include şi relaţiile (4.22, 4.23), este:

(4.24) $$[J] = \varphi_0 \begin{bmatrix} \cos^2\gamma & e^{-i\phi}\sin\gamma\cos\gamma \\ e^{i\phi}\sin\gamma\cos\gamma & \sin^2\gamma \end{bmatrix}.$$

Se observă că pentru toate stările de polarizare pură există relaţia:

$$\det J = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0.$$

Dacă radiaţia descrisă de matricea (4.24) este transmisă printr-un compensator, astfel încât faza componentei $\tilde{e}_y$ este întârziată cu: $\delta = -\phi$ faţă de cea a componentei $\tilde{e}_x$, atunci expresia matricii de coerenţă devine:

(4.24') $$[J'] = \varphi_0 \begin{bmatrix} \cos^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \\ \sin\gamma\cos\gamma & \sin^2\gamma \end{bmatrix}$$

adică se obţine radiaţie polarizată liniar pe direcţia γ (relaţia (4.22)).

Radiaţie nepolarizată. Este caracterizată printr-o valoare constantă a densităţii de flux transmisă, independent de valoarea unghiului α şi a deplasării δ a fazei:

$$\varphi(\alpha,\delta) = \frac{\varphi_0}{2} = ct,\ \text{de unde: } J_{xy} = J_{yx} = 0 \text{ şi } J_{xx} = J_{yy} = \frac{\varphi_0}{2}.$$

Prin urmare: $[J] = \frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, adică se obţine un multiplu al matricei unitate.

4.7 Compunerea a două fascicule de radiaţie necoerentă.

Două fascicule de radiaţie, care se propagă în aceeaşi direcţie, sunt reciproc necoerente dacă semnalele analitice sunt necorelate, adică dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$\langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle = \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle = \langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle = \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle = 0.$$

Matricea de coerenţă $[J]$ a semnalului analitic rezultant, caracterizat prin componentele:

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_x^{(1)} + \tilde{e}_x^{(2)} \\ \tilde{e}_y^{(1)} + \tilde{e}_y^{(2)} \end{bmatrix}$$

va fi reprezentată prin suma matricelor de coerenţă individuale:

$$\begin{bmatrix} \langle e_x e_x^* \rangle & \langle e_x e_y^* \rangle \\ \langle e_y e_x^* \rangle & \langle e_y e_y^* \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_x^{(1)*} \rangle & \langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_y^{(1)*} \rangle \\ \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_x^{(1)*} \rangle & \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_y^{(1)*} \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle \tilde{e}_x^{(2)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle & \langle \tilde{e}_x^{(2)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle \\ \langle \tilde{e}_y^{(2)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle & \langle \tilde{e}_y^{(2)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle \end{bmatrix}.$$

Natura fasciculului polarizat este independentă de φ_0, deci este determinată în mod univoc de matricea de coerenţă redusă $[j] = \frac{[J]}{\varphi_0}$. Dacă fasciculele componente sunt caracterizate prin aceeaşi matrice redusă $[j^{(1)}] = [j^{(2)}]$, atunci matricea de coerenţă a fascicului rezultant este:

$$[J] = \varphi_1[j] + \varphi_2[j] = (\varphi_1 + \varphi_2)[j].$$

Compunerea a două fascicule necoerente aflate în aceeaşi stare de polarizare conduce la un fascicul caracterizat prin aceeaşi polarizare ca şi componentele iniţiale.

Modul de compunere a fasciculelor necoerente este util pentru descrierea radiaţiei nepolarizate. De ex., radiaţie nepolarizată poate fi descrisă ca o suprapunere a două componente polarizate liniar, egal necoerente, cu plane de oscilaţie reciproc perpendiculare. Dacă unul dintre plane are o înclinare α_0 faţă de axa x, atunci o componentă a matricii de coerenţă este:

$$[J^{(1)}] = [J(\alpha_0)] = \frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha_0 & \sin\alpha_0\cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0\cos\alpha_0 & \sin^2\alpha_0 \end{bmatrix},$$

iar planul celei de a doua componente prezintă înclinarea $\left(\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}\right)$ şi matricea de coerenţă:

$$\left[J^{(2)}\right]=\left[J\left(\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix} \sin^2\alpha_0 & -\sin\alpha_0\cos\alpha_0 \\ -\sin\alpha_0\cos\alpha_0 & \cos^2\alpha_0 \end{bmatrix},$$

rezultă: $[J]=\left[J^{(1)}\right]+\left[J^{(2)}\right]=\frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (radiaţie nepolarizată).

Radiaţie nepolarizată poate fi descrisă şi ca o suprapunere de fascicule necoerente polarizate circular-dreapta, respectiv -stânga, caracterizată prin matricile:

$$\left[J^{(1)}\right]=\left[J_{RPCS}\right]=\frac{\varphi_0}{4}\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{bmatrix}, \quad \left[J^{(2)}\right]=\left[J_{RPCD}\right]=\frac{\varphi_0}{4}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix};$$

$$[J]=\left[J^{(1)}\right]+\left[J^{(2)}\right]=\frac{\varphi_0}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

De asemenea două fascicule necoerente, fiecare într-o stare de polarizare eliptică pură, pot fi combinate pentru a obţine radiaţie nepolarizată. Matricea de coerenţă a celor două stări este:

$$\left[J^{(1)}\right]=\varphi_1\begin{bmatrix}\cos^2\delta_1 & e^{-i\phi_1}\sin\delta_1\cos\delta_1\\ e^{i\phi_1}\sin\delta_1\cos\delta_1 & \sin^2\delta_1\end{bmatrix}, \text{ respectiv:}$$

$$\left[J^{(2)}\right]=\varphi_2\begin{bmatrix}\cos^2\delta_2 & e^{-i\phi_2}\sin\delta_2\cos\delta_2\\ e^{i\phi_2}\sin\delta_2\cos\delta_2 & \sin^2\delta_2\end{bmatrix}$$

Dacă se consideră: $\delta_2=\frac{\pi}{2}-\delta_1,\ \phi_2=\pi+\phi_1,\ \varphi_1=\varphi_2=\frac{\varphi_0}{2}$, atunci se obţine:

$$[J]=\left[J^{(1)}\right]+\left[J^{(2)}\right]=\frac{\varphi_0}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ultimul exemplu include pe primele două ca un caz special: pentru $\phi_1=0$ şi $\delta_1=\alpha_0$, se obţine primul caz, iar pentru $\phi_1=-\frac{\pi}{2}$ şi $\delta_1=\frac{\pi}{4}$ cel de-al doilea.

Aceste cazuri sunt: axa mare a elipsei este la 90^0 faţă de cealaltă, iar elipsele au aceeaşi formă şi dimensiune, cu elicitate opusă (fig. 33).

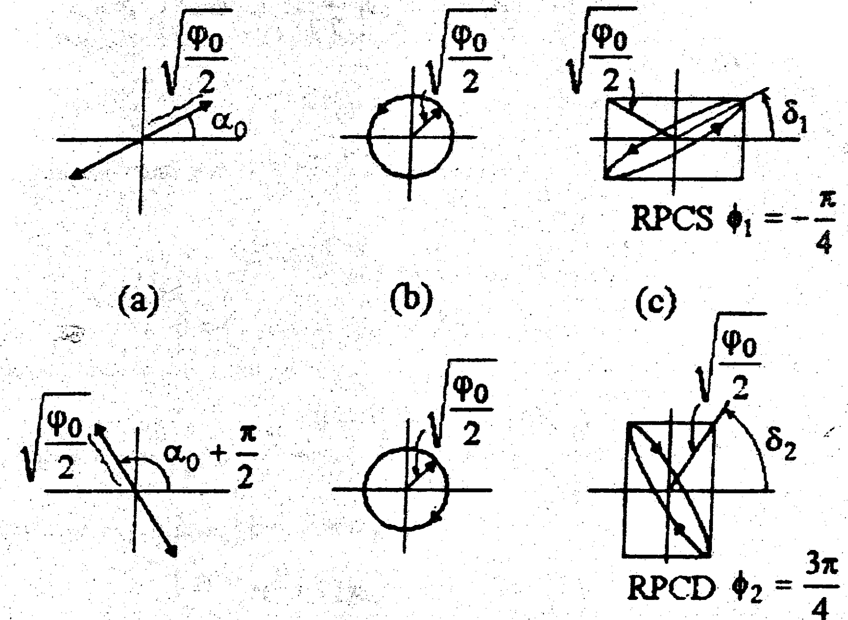


Fig. 33

4.8 Radiaţia polarizată parţial exprimată ca o suprapunere de radiaţie nepolarizată şi polarizată eliptic.

Radiaţia polarizată parţial poate fi obţinută ca rezultat al suprapunerii radiaţiei nepolarizate cu radiaţia polarizată pură (în general eliptic polarizată), iar descompunerea este unică. In acest scop trebuie arătat că o matrice de coerenţă arbitrară $[J]$ poate fi scrisă sub forma:

(4.25) $$[J]=\begin{bmatrix}J_{xx} & J_{xy}\\ J_{xy}^* & J_{yy}\end{bmatrix}=\left[J^{(1)}\right]+\left[J^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B & D\\ D^* & C\end{bmatrix}$$

Matricea $\left[J^{(2)}\right]$ descrie o stare de polarizare pură, deci determinantul ei este egal cu zero, adică trebuie îndeplinită condiţia:

(4.26) $$BC-DD^*=0.$$

Pe de altă parte, matricea $\left[J^{(2)}\right]$ trebuie să conducă numai la valori nenegative ale intensităţii (relaţia 4.15 b), deci sunt necesare condiţiile:

$$\varphi(0) \geq 0\text{, adică: } B \geq 0\text{, respectiv: } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0\text{, adică: } C \geq 0.$$

Din matricea (4.25) rezultă:

$$J_{xx} = A + B;\ J_{xy} = D;\ J^*_{xy} = D^* \text{ şi } J_{yy} = A + C,$$

de unde rezultă relaţiile: $B = J_{xx} - A$ şi $C = J_{yy} - A$, care introduse în (4.26) conduc la rezultatul:

$$(J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J^2_{xy} = 0\text{, sau:}$$

(4.27) $$A^2 - A(J_{xx} + J_{yy}) + (J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx}) = 0,$$

care este identică cu forma:

(4.27') $$A^2 - A\,\mathrm{Tr}J + \det J = 0$$

Relaţia (4.27) reprezintă *ecuaţia caracteristică a matricei* J, care poate fi scrisă sub forma:

$$\det([J] - A[I]) = 0 \text{ sau } \det\begin{pmatrix} J_{xx} - A & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} - A \end{pmatrix} = 0,$$

unde: $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matricea unitate).

Soluţiile ecuaţiei caracteristice ale matricii $[J]$ sunt:

(4.28) $$A_{12} = \frac{\mathrm{Tr}[J] \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2}.$$

Se observă că:

(4.29) $$(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J] = (J_{xx} + J_{yy})^2 - 4\left(J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2\right) = (J_{xx} - J_{yy})^2 + 4|J_{xy}|^2 \geq 0$$

adică valoarea radicalului se exprimă printr-o mărime reală.

Soluţiile A_{12} sunt nenegative. Pentru soluţia A_1 aceasta este evident:

$$A_1 = \frac{\mathrm{Tr}[J] + \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2}.$$

Pentru soluţia: $A_2 = \dfrac{\mathrm{Tr}[J] - \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2}$ este necesară condiţia:

$$\sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]} \leq \mathrm{Tr}[J].$$

De asemenea din relaţia (4.29) rezultă:

$$\sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]} = \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 - 4|J_{xy}|^2} \geq 0\text{, sau:}$$

$$\sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]} \geq |J_{xx} - J_{yy}|,$$

deci:

$$A_1 = \frac{\mathrm{Tr}[J] + \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2} \geq \frac{(J_{xx} + J_{yy}) + |J_{xx} - J_{yy}|}{2} = J_{xx},$$

dacă: $J_{xx} \geq J_{yy}$, sau:

$$A_1 \geq J_{yy}\text{, dacă: } J_{yy} \geq J_{xx}.$$

Dar $B = J_{xx} - A \geq 0$, adică este nescesar ca: $C = J_{yy} - A \geq 0$, deci mărimea A_1 nu îndeplineşte condiţia fizică.

Rezultă: $$A = A_2 = \frac{\mathrm{Tr}[J] - \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2}\text{, iar:}$$

$$B = J_{xx} - A_2 = \frac{2J_{xx} - J_{xx} - J_{yy} + \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2} = \frac{J_{xx} - J_{yy} + \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2}$$

$$C = J_{yy} - A_2 = \frac{J_{yy} - J_{xx} + \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]}}{2}.$$

Expresia intensităţii energetice totale devine:

$$\varphi_0 = J_{xx} + J_{yy} = \mathrm{Tr}[J] = A_1 + A_2.$$

Expresia intensităţii energetice a părţii de radiaţie polarizată devine:

$$\varphi_{pol} = \mathrm{Tr}[J]^{(2)} = B + C = \sqrt{(\mathrm{Tr}[J])^2 - 4\det[J]} = A_1 - A_2,$$

iar intensitatea energetică a părţii de radiaţie nepolarizată este:

$$\varphi_{nepol.} = \varphi_0 - \varphi_{pol.} = 2A_2.$$

Gradul de polarizare reprezintă raportul intensităţii părţii de radiaţie polarizată la cea a fasciculului total:

$$P=\frac{\varphi_{pol.}}{\varphi_0}=\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}=\frac{\sqrt{(Tr[J])^2-4\det[J]}}{Tr[J]}=\sqrt{1-\frac{4\det[J]}{(Tr[J])^2}}.$$

Matricea $\left[J^{(1)}\right]$ descrie un fascicul de radiație nepolarizată:

$$\left[J^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}=\frac{\varphi_{nepol.}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

iar matricea $\left[J^{(2)}\right]$ descrie un fascicul de radiație polarizat pur eliptic, deci:

$$\left[J^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}B & J_{xy}\\ J_{xy}^{*} & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & |J_{xy}|e^{-i\phi}\\ |J_{xy}|e^{i\phi} & C\end{bmatrix}=$$

$$=\varphi_{pol}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha_0 & \sin\alpha_0\cos\alpha_0 e^{-i\phi}\\ \sin\alpha_0\cos\alpha_0 e^{i\phi} & \sin^2\alpha_0\end{bmatrix},$$

unde: $\tan\alpha_0=\sqrt{\frac{B}{C}}$.

Dacă fasciculului este transmis printr-un compensator care deplasează fază cu $\delta=-\phi$, atunci expresia matricii $\left[J^{(2)}\right]$ devine:

$$\left[J^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}B & |J_{xy}|\\ |J_{xy}| & C\end{bmatrix}=I_{pol}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha_0 & \sin\alpha_0\cos\alpha_0\\ \sin\alpha_0\cos\alpha_0 & \sin^2\alpha_0\end{bmatrix},$$

în timp ce expresia matricii $\left[J^{(1)}\right]$ rămâne neschimbată.

Dacă fasciculul este transmis printr-un polarizor înclinat cu unghiul α, expresia intensității va fi:

$$\varphi(\alpha,-\phi)=\frac{\varphi_{nepol}}{2}+\varphi_{pol}\cos^2(\alpha-\alpha_0)=$$

$$=\frac{\varphi_0-\varphi_{pol}}{2}+\varphi_{pol}\cos^2(\alpha-\alpha_0)=\varphi_0\left[\frac{1}{2}+P\left(\cos^2(\alpha-\alpha_0)-\frac{1}{2}\right)\right],$$

a cărei valoare maximă este:

$$\varphi_{max}=\frac{\varphi_0}{2}(1+P)=\frac{\varphi_0}{2}\left(1+\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}\right)=A_1,$$

respectiv, valoarea minimă:

$$\varphi_{min}=\frac{\varphi_0}{2}(1-P)=A_2.$$

Prin urmare valoarea gradului de polarizare este:

$$P=\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}=\frac{\varphi_{max}-\varphi_{min}}{\varphi_{max}+\varphi_{min}}.$$

Dacă $\delta\neq-\phi$ atunci valorile maxime și minime ale mărimii $I(\alpha,\delta)$ vor fi mai mici, respectiv mai mari decât cele obținute mai sus.

4.9 Caracterizarea experimentală a unui fascicul de radiație polarizată parțial.

Radiația polarizată parțial reprezintă un amestec de radiație nepolarizată și eliptic polarizată. Ea poate fi caracterizată dacă se cunosc cinci parametri: intensitatea energetică totală (φ_0), gradul de polarizare P, unghiul de orientare $\beta/2$ a axei mari a elipsei, raportul $\tan\eta$ al lungimii axei mici față de cea mare și sensul de rotație al elicității. Determinarea acestor parametrii se poate face utilizând un polarizor și o lamă sfert de lungime de undă.

Se plasează întâi polarizorul în fascicul și se rotește până se observă intensitatea maximă. Cele două direcții de transmisie care dau maxim de intensitate corespund vectorului câmp electric $\mathbf{e}$ care oscilează de-a lungul axelor principale ale elipsei, deci corespund unghiurilor $\left(\frac{\beta}{2}\right)$ și $\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$. Direcția de transmisie care corespunde valorii minime a intensității este $\left(\frac{\beta}{2}\pm\frac{\pi}{2}\right)$.

Starea de polarizare a radiației fascicului transmis este cuprinsă între două situații extreme:

- radiație polarizată pur eliptic caracterizată prin $\tan\eta=\sqrt{\frac{\varphi_{min}}{\varphi_{max}}}$;
- amestec de radiație nepolarizată și polarizată liniar care oscilează de-a lungul direcției de azimut $\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

In acest caz este convenabil să se considere un set nou de axe de-a lungul versorilor $\hat{i}$ și $\hat{j}$. Se introduce o lamă $\lambda/4$ în fasciculul inițial, astfel încât axa ei "rapidă" este dispusă de-a lungul versorului $\hat{i}$. Radiația polarizată eliptic cu axa mare de-a lungul versorului $\hat{i}$ va fi transformată în radiație polarizată liniar care oscilează

sub unghiul $\pm\eta$ față de $\hat{i}$, unde semnul plus se referă la radiația polarizată eliptic-dreapta, iar semnul minus la radiația polarizată eliptic-stânga. Dacă radiația originală reprezintă un amestec de radiație nepolarizată și polarizată liniar care oscilează de-a lungul lui $\hat{i}$, acțiunea lamei $\lambda/4$ nu are nici un efect.

In cazul când avem amestec va exista o componentă nepolarizată după ce radiația a trecut prin lama $\lambda/4$. Unghiul η poate fi determinat utilizând un polarizor după lama $\lambda/4$. Dacă direcția de transmitere a polarizorului este de-a lungul lui η sau $\eta+\pi$ (față de axa $\hat{i}$), intensitatea va prezenta valoarea maximă:

$$\varphi_{max} = \varphi_{pol} + \frac{\varphi_{nepol}}{2}.$$

Dacă direcția de transmitere maximă este de-a lungul direcției $\eta + \frac{\pi}{2}$, intensitatea va prezenta valoarea minimă:

$$\varphi_{min} = \frac{\varphi_{nepol}}{2}.$$

Gradul de polarizare va fi: $P = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{min}}{\varphi_{max} + \varphi_{min}}$, iar densitatea spectrală totală de flux: $\varphi_0 = \varphi_{max} + \varphi_{min}$.

Cap. III

PROPAGAREA RADIAȚIILOR OPTICE PRIN MEDIUL MATERIAL.

1. Ecuațiile Maxwell într-un mediu material.

Propagarea radiațiilor optice prin mediul material este descrisă de ecuațiile Maxwell:

$$\text{(a)}\ \nabla\times\mathbf{e} = -\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} \qquad \text{(c)}\ \nabla\cdot\mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

(1.1)

$$\text{(b)}\ \nabla\times\mathbf{b} = \mu_0\mathbf{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t} \qquad \text{(d)}\ \nabla\cdot\mathbf{b} = 0$$

unde ρ reprezintă densitatea totală de sarcină electrică, iar $\mathbf{j}$ - vectorul densității totale de curent electric. Densitatea totală de sarcină, ca și cea de curent, este constituită din doi termeni: unul corespunzător sarcinilor electrice libere (sau de conducție - ρ_c), respectiv curenți liberi ($\mathbf{j}_c$), iar celălalt este determinat de reacția substanței la acțiunea câmpului *em* perturbator ($\rho_l, \mathbf{j}_l$). Pe de altă parte mărimile ce caracterizează câmpul *em* sunt determinate de aceleași sarcini și curenți, în acest mod obținându-se un sistem cuplat.

Sarcinile și curenții asociați sistemelor atomice constituiente ale substanței prezintă discontinuități la scara atomică (pe distanțe de ordinul 1 Å). Din această cauză mărimile $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ și $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ vor prezenta variații foarte rapide atunci când punctul definit de vectorul de poziție $\mathbf{r}$ va fi dispus în domeniul ocupat de sistemul atomic sau între sisteme. Valorile acestor mărimi, care caracterizează câmpul microscopic, nu pot fi observate cu ajutorul dispozitivelor actuale de măsură. Din această cauză se introduce noțiunea de *câmp macroscopic* caracterizat prin mărimile $\overline{\mathbf{e}}$ și $\overline{\mathbf{b}}$, obținute prin

medierea câmpului microscopic pe un element de volum ΔV, care din punct de vedere macroscopic este mic, dar este mare față de dimensiunile sistemelor atomice, deci conține un număr mare de sisteme. In acest mod sunt netezite variațiile spațiale brușe ale câmpului microscopic, iar mărimile mediate sunt măsurabile cu dispozitivele de măsură actuale.

Dacă $\Delta V = \int_V d^3 l$ reprezintă elementul de volum definit mai sus, intensitatea câmpului electric macroscopic este dată de relația:

$$\bar{e}(r) = \frac{1}{\Delta V}\int_V e(r+l) d^3 l,$$

unde vectorul $\mathbf{r}$ fixează punctul în care este centrat elementul de volum ΔV, iar vectorul $\mathbf{l}$ generează acest element. O expresie asemănătoare este valabilă pentru inducția magnetică macroscopică:

$$\bar{b}(r) = \frac{1}{\Delta V}\int_V b(r+l) d^3 l.$$

In același mod se definește densitatea de sarcină macroscopică, respectiv densitatea de curent macroscopică:

$$\bar{\rho}_{total}(r) = \frac{1}{\Delta V}\int_V \rho(r+l) d^3 l$$

$$\bar{j}_{total}(r) = \frac{1}{\Delta V}\int_V j(r+l) d^3 l.$$

Aceste mărimi macroscopice măsurabile satisfac ecuațiile Maxwell.

Un domeniu macroscopic al substanței poate conține o sarcină, respectiv o densitate de curent netă. Acestea sunt cunoscute sub denumirea de *sarcini libere* (ρ_c), respectiv *curenți liberi* ($\mathbf{j}_c$), deosebite de *sarcinile legate* (ρ_l), respectiv *curenții legați* ($\mathbf{j}_l$). De ex. un sistem atomic poate avea o sarcină cu care contribuie la densitatea de sarcină liberă. Insă, indiferent de prezența sau lipsa sarcinii libere, sistemul atomic, printr-o acțiune externă, poate fi polarizat, adică poate să prezinte în interiorul lui o separare relativă a sarcinilor pozitive (nucleele atomice) față de cele negative (elctronii). Dacă $\mathbf{r}_j$ reprezintă vectorul de poziție față de centrul de masă al sarcinilor pozitive (q_j), iar $\mathbf{r}_{-i}$ - același vector corespunzător sarcinilor negative ($-q_{-i}$), atunci se poate defini momentul de dipol al sistemului:

(1.2) $$\mathbf{p} = \sum \left(q_j \mathbf{r}_j - q_i \mathbf{r}_{-i}\right).$$

In general trebuie să se facă deosebire între momentul de *dipol electric permanent* și cel *indus*, determinat de deplasarea sarcinilor electrice într-un câmp electric extern.

Pentru a caracteriza substanța din punct de vedere macroscopic, se introduce noțiunea de *moment mediu de dipol electric (polarizație)*, definit pentru unitate de volum:

(1.3) $$\mathbf{P}(\mathbf{R},t) = \frac{1}{\Delta V}\sum \mathbf{p}_i(\mathbf{r},t) \quad \left(\frac{Cm}{m^3} = \frac{C}{m^2}\right).$$

"Sarcinile legate" reprezintă sarcina macroscopică existentă în substanță, determinată de prezența polarizației macroscopice $\mathbf{P}(\mathbf{R},t)$. Dacă polarizația este constantă, fiecare element de volum macroscopic conține același număr de sarcini legate pozitive și negative, deci densitatea de sarcini "legate" este egală cu zero ($\rho_l = 0$). Dacă polarizația prezintă variații spațiale, adică depinde de punct $\mathbf{P}(\mathbf{R})$, atunci densitatea de sarcini legate este diferită de zero ($\rho_l \neq 0$), fiind determinată de polarizație prin intermediul relației:

(1.4) $$\rho_l = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{R},t).$$

"Curentul legat" este determinat de mișcarea "sarcinilor legate" în substanță, și este determinat de relația:

(1.5) $$\mathbf{j}_l = \frac{1}{\Delta V}\sum \left(q_j \dot{\mathbf{r}}_j - q_i \dot{\mathbf{r}}_{-i}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{R},t)}{\partial t},$$

în timp ce curentul de conducție este dat de relația:

$$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{e},$$

unde σ reprezintă *conductivitatea* substanței.

Pe baza acestor observații, relațiile (1.1) pot fi scrise sub forma:

(1.1')

$$a)\ \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \qquad b)\ \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

$$c)\ \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \sigma \mathbf{e} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \qquad d)\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

Din punct de vedere fenomenologic, prezența substanței se manifestă prin modificarea mărimii fizice - *permitivitatea electrică* - caracteristică domeniului unde aceasta este prezentă. Deoarece prezența sistemelor atomice modifică legile de propagare ale câmpului *em* este necesar să se stabilească legătura dintre proprietățile microscopice ale substanței și această mărime macroscopică. Se va considera cazul substanțelor nemagnetice ($\mu_r = 1$). Dacă este cunoscută mărimea sarcinilor libere (ρ_c) și a curenților liberi ($\mathbf{j}_c$), precum și mărimea polarizației $\mathbf{P}(\mathbf{R},t)$ care determină mărimea sarcinilor și curenților legați, atunci sunt cunoscute toate sursele care determină mărimile $\mathbf{e}$ și $\mathbf{b}$, deci aceste mărimi pot fi obținute prin integrarea ecuațiilor Maxwell.

Problema care apare constă în stabilirea legăturii dintre mărimea $\mathbf{P}(\mathbf{R},t)$ şi caracteristicele substanţei. Dacă considerăm că această mărime depinde numai de câmpul $\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$ în punctul considerat (teoria locală), iar dependenţa celor două mărimi este liniară, atunci, fenomenologic se poate scrie relaţia:

(1.6) $$\widetilde{P}(r)=\widetilde{\chi}\varepsilon_0 e(r),$$

unde $\widetilde{\chi}$ reprezintă *susceptibilitatea electrică*, o mărime complexă caracteristică substanţei, care stabileşte legătura dintre câmpul electric şi polarizaţia determinată de acesta.

In relaţia (1.6), mărimea $\widetilde{\chi}$ este adimensională; uneori relaţia (1.6) este prezentată sub forma: $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r})=\widetilde{\chi}\mathbf{e}(\mathbf{r})$, mărimea $\widetilde{\chi}$ având dimensiunile permitivităţii electrice.

Presupunem un ansamblu de sisteme atomice, lipsite de moment de dipol electric permanent, dar cărora li se poate induce un moment de dipol sub acţiunea câmpului electric extern. Un asemenea ansamblu constiuie un *mediu nepolar*. Momentul de dipol indus sub acţiunea câmpului electric extern este dat de relaţia (I 4.12):

$$\mathbf{p}_i=\widetilde{\alpha}\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_i),$$

unde $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_i)$ reprezintă intensitatea câmpului electric în centrul de masă al sistemului atomic *i*. Această mărime poate fi considerată constantă pe domeniul de extindere al sistemului atomic. Câmpul microscopic local $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}_i)$ depinde nu numai de poziţia $(\mathbf{r}_i)$ a punctului, ci este determinat atât de prezenţa celorlalte sisteme atomice cât şi de mărimea şi orientarea dipolilor induşi de câmp în aceste sisteme. Dacă se mediază câmpul microscopic pe elementul de volum ΔV se obţine câmpul local mediu $\mathbf{E}_l(\mathbf{r})$, care acţionează asupra sistemului atomic considerat. Câmpul local $\mathbf{E}_l(\mathbf{r})$ se deosebeşte de câmpul macroscopic $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ care reprezintă media câmpurilor microscopice extinsă asupra tuturor poziţiilor din volumul elementar considerat nu numai asupra poziţiei ocupate de sistemul atomic.

2. Susceptibilitatea electrică a ansamblului de sisteme atomice.

Pentru a rezolva această problemă este necesar pe de o parte să se introducă un model pentru sistemul atomic, pe baza căruia să se calculeze polarizabilitatea $\widetilde{\alpha}$ a sistemului, iar pe de altă parte să se stabilească legătura dintre câmpul macroscopic $\mathbf{E}$ şi câmpul local $\mathbf{E}_l$.

Un model al unui sistem atomic nepolar este reprezentat de dipolul electric liniar oscilant amortizat (modelul Lorentz). Pentru acest model, în prg. I 4.2, s-a stabilit relaţia (I 4.3):

$$\widetilde{p}(\omega)=\widetilde{\alpha}\,\widetilde{E}_m(\omega)=-i\frac{e^2}{m_e\gamma_0\omega_0}\frac{1}{1+i\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}\widetilde{E}_m(\omega),$$

unde $\widetilde{E}_m(\omega)$ reprezintă intensitatea câmpului electric microscopic care acţionează asupra dipolului. Polarizaţia, care reprezintă media momentului de dipol electric pe unitate de volum, va fi:

$$\widetilde{P}(\omega)=n_v\langle\widetilde{p}(\omega)\rangle=n_v e\langle\widetilde{r}\rangle=n_v\,\widetilde{\alpha}(\omega)\langle\widetilde{E}_m(\omega)\rangle=$$

(2.1) $$=-i\frac{n_v e^2}{m_e\gamma_0\omega_0}\frac{1}{1+i\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}\widetilde{E}_l(\omega)$$

unde n_v reprezintă numărul mediu de dipoli din unitatea de volum, iar $\widetilde{E}_l(\omega)$ intensitatea câmpului mediu ce acţionează asupra dipolului.

Aprecierea câmpului local depinde de caracteristicile mediului considerat. Pentru simplificare se consideră un ansamblu de dipoli relativ diluat astfel încât dipolii să influenţeze puţin mărimea intensităţii câmpului excitator. In aceste condiţii se poate considera $\widetilde{E}_l(\mathbf{R},\omega)=\widetilde{E}(\mathbf{R},\omega)$, iar polarizaţia unui asemenea ansamblu de dipoli este:

(2.2) $$\widetilde{P}(\omega)=\widetilde{\chi}(\omega)\varepsilon_0\widetilde{E}(\omega)=i\frac{n_v e^2}{m_e\gamma_0\omega_0}\frac{1}{1+i\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}\widetilde{E}(\omega),$$

de unde:

(2.3) $$\widetilde{\chi}(\omega)=i\frac{n_v e^2}{m_e\varepsilon_0\gamma_0\omega_0}\frac{1}{1+i\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}.$$

Susceptibilitatea fiind o mărime complexă, se poate scrie:

$$\widetilde{\chi}(\omega)=\chi'(\omega)+i\chi''(\omega)=$$

$$=\frac{n_v e^2}{m_e\varepsilon_0\gamma_0\omega_0}\left[\frac{\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}+i\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}\right].$$

Factorul din fața parantezei, folosind (I 6.1, I 7.6), poate fi scris sub forma:

$$\frac{n_v e^2}{m_e \varepsilon_0 \gamma_0 \omega_0} = \frac{n_v 6\pi c^3 e^2 \omega_0}{\omega_0^3 \Delta\omega_0 6\pi m_e c^3 \varepsilon_0} = \frac{3 n_v \lambda_0^3}{m_e 2\pi^2 \Delta\omega_0 T_1},$$

unde produsul $\Delta\omega_0 T_1 = 2$, dacă dipolii ansamblului pot fi considerați liberi. In general această mărime este mai mare decât doi și determină micșorarea valorii maxime a susceptibilității.

Partea imaginară și cea reală a susceptibilității complexe este de forma:

(2.4 a)
$$\chi''(\omega) = -\frac{n_v}{\varepsilon_0}\frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0}\frac{2}{\pi\Delta\omega_0}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} =$$

$$= \frac{n_v}{\varepsilon_0}\alpha''(\omega) = \chi''(\omega_0) g_0(\omega,\omega_0)$$

(2.4 b)
$$\chi'(\omega) = -\frac{n_v}{\varepsilon_0}\alpha'(\omega) = \chi''(\omega_0)\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_0/2} g_0(\omega,\omega_0),$$

unde: $\chi''(\omega_0) = -\frac{n_v}{\varepsilon_0}\frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0}$, iar funcția $g_0(\omega,\omega_0)$ este normată.

Din ecuațiile Maxwell se poate obține ecuația de propagare (fundamentală) a câmpului *em*. Dacă se aplică operatorul ($\nabla\times$) ecuației (1.1'a), folosind ecuația (1.1'c) și identitatea vectorială:

$$\nabla\times(\nabla\times \mathbf{e}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{e}) - \nabla^2\mathbf{e}, \text{ se obține:}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{e}) = -\nabla\times\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{b}) =$$

, sau:

$$= \mu_0\sigma\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}$$

(2.5)
$$-\nabla^2\mathbf{e} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{e}) + \mu_0\sigma\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} = 0.$$

Relația (2.5) reprezintă o ecuație cu derivate parțiale având variabile independente mărimile (x,y,z) și t. Ea descrie dependența intensității câmpului electric de caracteristicile substanței. Deoarece direcția de acțiune a intensității componentei electrice a câmpului *em*, este perpendiculară la direcția de propagare, este îndeplinită condiția:

(2.6)
$$\nabla.\mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z = 0.$$

In cele ce urmează se poate întâlni cazul în care un mediu este dopat cu sisteme atomice (dipoli electrici). Prin urmare la interacțiunea câmpului *em* cu dipolii electrici de dopaj trebuie considerată influența caracteristicilor mediului dopat ($\widetilde{\varepsilon}$) asupra câmpului, iar expresia polarizației dipolilor de dopaj determinată de acțiunea câmpului *em* (1.6) devine:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \widetilde{\chi}\widetilde{\varepsilon}\mathbf{e}(\mathbf{r},t).$$

In aceste condiții, considerând și observația (2.6), ecuația (2.5) devine:

(2.7)
$$\nabla^2\mathbf{e} - \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0\widetilde{\varepsilon}\frac{\partial^2\mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} = 0.$$

Considerăm drept soluție a acestei ecuații o expresie de forma:

(2.8)
$$\mathrm{e}(z,t) = \mathrm{E}_0\cos(\omega t - \Gamma z) = \widetilde{\mathrm{E}}(z)e^{i\omega t} = \widetilde{\mathrm{E}}_0 e^{-\Gamma z}e^{i\omega t} + \mathrm{cc},$$

adică elongația câmpului electric depinde atât de coordonatele spațiale cât și de variabila temporală. Această expresie descrie o undă armonică, plană, ce se propagă de-a lungul direcției *z*, iar mărimea Γ reprezintă o constantă nederminată. Mărimea E_0 nu depinde de variabilele t și z, ea fiind dispusă în planul (x,y).

In aceste condiții ecuația (2.5) conduce la relația:

$$\left(-\Gamma^2 + i\mu_0\sigma\omega - \mu_0\widetilde{\varepsilon}\omega^2 - \mu_0\widetilde{\varepsilon}\widetilde{\chi}\omega^2\right)\widetilde{\mathrm{E}}_0 e^{-\Gamma z}e^{i\omega t} = 0,$$

de unde:

(2.9)
$$\Gamma = \pm\omega\sqrt{\mu_0\widetilde{\varepsilon}}\left\{1+\chi'(\omega) - i\left[\frac{\sigma}{\widetilde{\varepsilon}\omega} - \chi''(\omega)\right]\right\}^{1/2}.$$

Prin urmare expresia (2.8) reprezintă o soluție a ecuației de undă dacă mărimea Γ satisface relația (2.9). Semnul ($\pm$) corespunde undelor progresive ce se propagă în sensul pozitiv, respectiv negativ al direcției z.

Dacă în expresia (2.9) termenul care se adaugă unității este mic, atunci aceasta poate fi dezvoltată în serie:

(2.10)
$$\Gamma \cong \pm i\omega\sqrt{\mu_0\widetilde{\varepsilon}}\left\{1+\frac{\chi'(\omega)}{2} - i\left[\frac{\sigma}{2\widetilde{\varepsilon}\omega} - \frac{\chi''(\omega)}{2}\right]\right\} =,$$

$$= \pm\{[\mathrm{a}_0(\omega) - \mathrm{a}_m(\omega)] + i[\mathrm{k}(\omega) + \mathrm{k}_m(\omega)]\}$$

unde:

$$\mathrm{k}(\omega) = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}, \text{ respectiv: } \mathrm{k}_m(\omega) = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\frac{\chi'(\omega)}{2} = \mathrm{k}(\omega)\frac{\chi'(\omega)}{2},$$

$$a_0(\omega)=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}},\ \text{respectiv:}$$

$$a_m(\omega)=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\,\frac{\chi''(\omega)}{2}=k(\omega)\frac{\chi''(\omega)}{2}.$$

Intensitatea componentei electrice a câmpului *em* care se propagă în sensul pozitiv al direcţiei z într-un ansamblu de dipoli electrici dopat cu dipoli caracterizaţi prin frecvenţa proprie de oscilaţie (ω_0) este:

(2.11)
$$e(z,t)=E_0\exp\{-[a_0(\omega)-a_m(\omega)]z\}\exp\{i[\omega t-(k(\omega)+k_m(\omega))]\}$$

Relaţia:

$$k(\omega)z=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}\,z=\frac{\omega}{c/n}z=\frac{\omega}{v_f}z=\frac{2\pi n}{\lambda_0}z=k_0 n z,$$

descrie variaţia fazei câmpului *em* la propagarea acestuia prin mediul caracterizat prin indicele de refracţie n (fără sisteme de dopaj), iar relaţia: $k_m(\omega)z=k(\omega)\frac{\chi'(\omega)}{2}z$ descrie contribuţia la această variaţie a interacţiunii dintre câmpul *em* şi dipolii electrici de dopaj. Mărimea acestei contribuţii are un caracter rezonant, fiind determinată de conturul funcţiei $\chi''(\omega)$ a răspunsului dipolilor.

Mărimea: $a_0(\omega)z=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}z$ depinde de conductivitatea mediului considerat şi determină atenuarea câmpului *em* la propagarea acestuia datorită interacţiunii cu sarcinile libere (pierderi ohmice), iar mărimea: $a_m(\omega)z=k(\omega)\frac{\chi''(\omega)}{2}z$ determină variaţia amplitudinii câmpului datorită interacţiunii de rezonanţă a acestuia cu dipolii electrici de dopaj.

Dacă relaţia:

$$a_m(\omega)=-\frac{n_v\,\omega_0}{c/n}\,\frac{\pi e^2}{2m_e\,\omega_0\varepsilon_0}\,\frac{2}{\pi\Delta\omega}\,\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2}\right)^2}$$

se împarte la densitatea (n_v) dipolilor ansamblului, se obţine mărimea fizică:

(2.12)
$$\sigma(\omega)=\frac{a_m(\omega)}{n_v}=\frac{\omega_0}{c/n}\,\frac{\pi e^2}{2m_e\,\omega_0\varepsilon_0}\,\frac{2}{\pi\Delta\omega}\,\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2}\right)^2},$$

denumită *secţiune transversală de absorbţie*. Această mărime descrie capacitatea de interacţiune a unui dipol al ansamblului cu câmpul *em* şi prezintă un caracter rezonant al variaţiei cu frecvenţa.

Mărimea ($\sqrt{\mu/\varepsilon}$) are dimensiunile unei rezistenţe şi reprezintă impedanţa caracteristică a mediului pentru unda plană. In cazul vidului se obţine: $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=377\Omega$.

In cazul analizei propagării câmpului *em* în vid ($\sigma=0$, $n=1$, $\tilde{\chi}(\omega)=0$) ecuaţia de propagare are forma:

(2.13)
$$\nabla^2 e(z,t)-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 e(z,t)}{\partial t^2}=0,$$

iar intensitatea câmpului electric este:

(2.14)
$$e(z,t)=\tilde{E}_0 e^{i[\omega t-k(\omega)z]}$$

Mărimea ω/k trebuie să prezinte dimensiunile unei viteze, deci: $v_f=\frac{\omega}{k}=c$, adică viteza de propagare în vid a fazei câmpului *em* este egală cu c (viteza de propagare în vid a radiaţiilor optice).

In cazul analizei propagării câmpului *em* într-un ansamblu de dipoli electrici, dispuşi în vid, caracterizaţi prin frecvenţa proprie ω, trebuie considerat: $n=1$, $\sigma\neq 0$ şi $\tilde{\chi}(\omega)\neq 0$, deci ecuaţia de propagare are forma (2.7), iar intensitatea câmpului electric este descrisă de relaţia (2.11). Viteza de propagare a fazei câmpului *em* va fi dată de relaţia:

(2.15)
$$v_f=\frac{\omega}{k_{total}}=\frac{\omega}{k_0\left[1+\dfrac{\chi'(\omega)}{2}\right]}=\frac{c}{1+\dfrac{\chi'(\omega)}{2}}=\frac{c}{n_a(\omega)},$$

unde: $n_a(\omega)=1+\frac{\chi'(\omega)}{2}$ reprezintă indicele de refracţie al ansamblului considerat.

Din cele prezentate mai sus reiese că partea imaginară a susceptibilităţii electrice ($\chi''(\omega)$) descrie atenuarea câmpului *em* la propagarea acestuia prin ansamblul considerat (creşterea intensităţii câmpului în cazul dispozitivelor laser). Dipolii electrici sub acţiunea câmpului *em* de frecvenţă ω centrată în jurul frecvenţei proprii de oscilaţie, intră în oscilaţii forţate. Ca rezultat ei radiază câmp *em* sub formă de unde

secundare la frecvenţă egală cu frecvenţa excitatoare. Dacă dipolul este liber energia radiată este egală cu cea absorbită de la câmpul excitator (legea conservării energiei). In cazul ansamblului de dipoli energia radiată de către dipol este mai mică decât cea absorbită, diferenţa fiind transmisă celorlalte componente ale ansamblului, transformându-se în alte forme de energie.

Partea reală a susceptibilităţii ($\chi'(\omega)$) determină variaţia suplimentară a fazei câmpului *em* la propagarea acestuia prin ansamblul. Dacă frecvenţa câmpului excitator coincide cu frecvenţa proprie de oscilaţie a dipolilor variaţia suplimentară este egală cu zero, însă variaţiile fazei pentru frecvenţe ale câmpului simetrice faţă de frecvenţa de rezonanţă sunt egale şi opuse ca semn.

Deoarece dipolii ansamblului nu interacţionează, se poate considera că frecvenţele de bază ale contururilor individuale de absorbţie coincid, iar toate contururile sunt caracterizate prin aceeaşi lăţime spectrală. In acest caz răspunsurile tuturor dipolilor ansamblului la acţiunea câmpului *em* armonic sunt identice. Conform relaţiilor (2.4 a,b), răspunsul ansamblului de dipoli reprezintă suma răspunsurilor individuale. Lăţimea spectrală a conturului mărimii $\chi''(\omega)$ va fi egală cu cea a unui răspuns individual, iar ordonata mărimilor $\chi'(\omega)$ şi $\chi''(\omega)$ la o frecvenţă dată va fi egală cu ordonata răspunsului individual la aceeaşi frecvenţă multiplicată cu densitatea de dipoli electrici ai ansamblului. In acest caz, dependenţa de frecvenţă mărimilor $\chi'(\omega)$ şi $\chi''(\omega)$ este asemănătoare cu cea a mărimilor $\alpha'(\omega)$ şi $\alpha''(\omega)$ reprezentate în fig. 6.

Cap. IV

MECANISME DE LĂŢIRE A STRUCTURII SPECTRALE A CÂMPULUI *EM* EMIS DE CATRE UN ANSAMBLU DE DIPOLI ELECTRICI.

Lăţimea structurii spectrale a câmpului *em* emis de către un ansamblu de dipoli electrici este determinată pe de o parte de structura spectrală a semnalului emis de către dipol, iar pe de altă parte de mecanismele de interacţiune dintre dipoli.

1. Ansamblu format din dipoli electrici liberi.

Acesta este un caz ideal în care se presupune că dipolii electrici sunt în repaus şi nu interacţionează între ei. Lăţimea spectrală a câmpului emis este egală cu lăţimea spectrală a câmpului emis de către un singur dipol, conform relaţiei (I 6.11). Conform acestei relaţii, lăţimea spectrală a câmpului *em* emis este determinată de faptul că amplitudinea oscilaţiilor este dependentă de timp (lăţirea apare ca un efect al transformării Fourier). Densitatea spectrală a fluxului emis de către ansamblu caracterizat prin densitatea n_v de dipoli, conform relaţiei (I 16.12), este:

$$\varphi_{total}(\omega)=\frac{2\pi E_0^2 n_v}{c\mu_0\Delta\omega_0\Delta t_0}\frac{2}{\pi\Delta\omega_0}\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2}= \qquad (1.1)$$

$$=\frac{2\pi E_0^2 n_v}{c\mu_0\Delta\omega_0\Delta t_0}n_v\, g_L(\omega,\omega_0)$$

2. Ansamblu format din dipoli electrici care pot interacționa prin ciocniri.

2.1 Structura spectrală a câmpului *em* emis de către acest ansamblu.

Ciocnirea unui dipol care se află în procesul de emisie cu un alt dipol, fragmentează câmpul *em* emis. Ciocnirile la care poate fi supus sistemul fizic considerat - dipolul electric - pot fi *elastice* și *neelastice*.

Ciocnirea se consideră elastică dacă în timpul acestui proces nu se modifică valoarea energiei momentane asociată mișcării oscilatorii interne a sistemului (în momentul ciocnirii nu se modifică valoarea amplitudinei oscilației). In cadrul acestui proces se modifică numai energia cinetică a sistemelor, însă în așa fel încât suma energiilor cinetice ale acestora înainte de ciocnire este egală cu cea de după ciocnire. Ciocnirile în care partenerii schimbă între ei cantități egale ale energiei lor interne, de asemenea sunt considerate elastice, deoarece nu se modifică energia internă proprie momentană. Deși ciocnirea elastică nu modifică energia internă momentană a sistemului, ea modifică în mod aleator faza mișcării oscilatorii (față de faza mișcării anterioare ciocnirii sau față de faza câmpului *em* cu care interacționează).

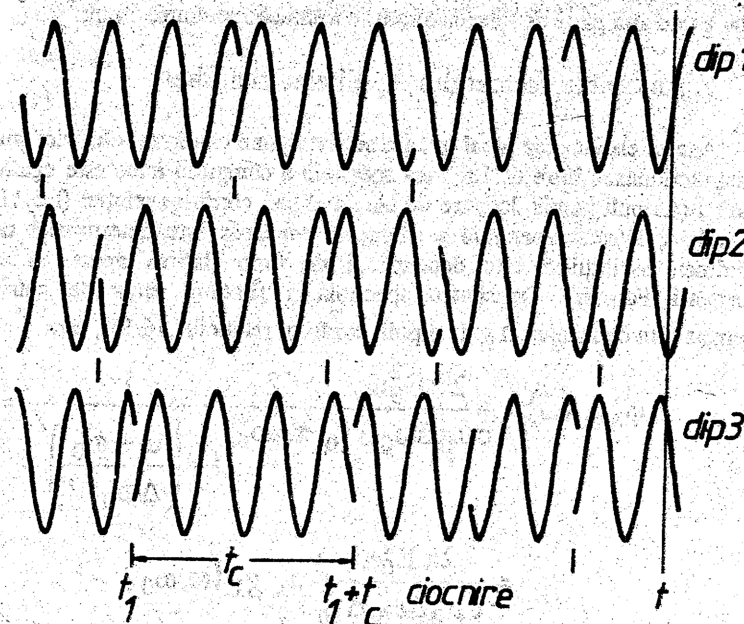


Fig. 34.

In cazul ciocnirii *neelastice* sistemul poate pierde momentan toată energia asociată mișcării interne oscilatorii sau o parte din ea (se modifică valoarea amplitudinei momentului de dipol oscilant). Energia pierdută poate fi transferată aceluiași sistem, mărind energia cinetică a acestuia, partenerului de ciocnire tot sub formă de energie cinetică, peretelui incintei dacă sistemul se ciocnește cu acesta, sau să determine creșterea energiei interne asociată mișcării oscilatorii interne a partenerului de ciocnire. Prin urmare ciocnirea neelastică, pe lângă faptul că modifică în mod aleator faza mișcării oscilatorii interne față de cea anterioară ciocnirii, contribuie și la rata totală (γ) de amortizare a mișcării interne. Intr-un ansamblu de sisteme fizice de tipul celor considerate mai sus, cele două tipuri de ciocniri apar simultan, cu diferite rate, însă nu poate fi stabilită contribuția separată a acestora la procesul de de defazare a mișcării oscilatorii interne. După ciocnire dipolul emițător reia procesul de emisie cu o fază diferită față de cea anterioară ciocnirii (fig. 34). Salturile de fază nu sunt corelate între ele; ele pot lua cu egală probabilitate orice valoare în intervalul ($-\pi \div +\pi$).

Câmpul *em* emis de către un dipol electric amortizat în intervalul de timp t_c cuprins între două ciocniri (t_1 reprezintă momentul primei ciocniri), conform relației (I 6.1), este descris de relația:

$$e_j = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}_{0j}\, e^{i\omega_0 t}\right) \quad \text{pentru } t_1 \le t \le t_1 + t_c$$
$$e_j = 0 \quad \text{pentru } t \le t_1 \text{ și } t \rangle t_1 + t_c$$

Câmpul *em* emis de către ansamblul de dipoli electrici considerat va fi de forma:

$$e(t) = \sum_{j=1}^{N} e_j(t) = \sum_{j=1}^{N} E_{0j} \cos(\omega_0 t + \varphi_j) = \mathrm{Re}\left[E(t) e^{i\varphi(t)} e^{i\omega_0 t}\right], \tag{2.1}$$

Stabilirea expresiei funcției de distribuție spectrală a câmpului emis de către ansamblu, se poate face pe baza teoremei lui Wiener-Chinchine (vezi prg. II 3.3.2.1 cazul 3). Funcția normată de distribuție spectrală caracteristică câmpului *em* emis de către ansamblul considerat are forma:

$$g_c(\omega) = 2\pi \frac{2}{\pi \Delta\omega_c} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_c / 2}\right)^2} \tag{2.2}$$

Conform definiției, lățimea spectrală a acestei funcții este:

$$\Delta\omega_c = \frac{2}{T_2}, \tag{2.3}$$

unde mărimea T_2 reprezintă timpul mediu de ciocnire. Funcția normată a distribuției spectrale este reprezentată printr-un contur de tip Lorentz (de tipul celui prezentat în fig. 6 sau fig. 38).

În cazul unui ansamblu în stare gazoasă, din teoria cinetică a gazelor rezultă că valoarea timpului mediu de ciocnire poate fi apreciată din relația: $T_2 = \frac{\overline{\lambda}}{\overline{v}} = \frac{kT}{\sigma p}\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}$, unde: $\overline{\lambda} = \frac{1}{\langle n\sigma \rangle}$ reprezintă lungimea drumului liber mediu de ciocnire, σ - secțiunea eficace de ciocnire, $n = \frac{p}{kT}$ - numărul de dipoli din unitate de volum, iar $\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ - viteza termică medie a acestora. Din aceste relații rezultă:

$$T_2 \cong \frac{\sqrt{\pi mkT}}{16\sigma p} = \frac{\sqrt{mkT}}{16a^2 p\sqrt{\pi}}, \tag{2.4}$$

unde: a - raza efectivă Bohr pentru sistemul atomic considerat, care este de ordinul de 1 Å. (Secțiunea transversală de ciocnire are dimensiunile unei arii și se raportează la aria unei sfere cu raza egală cu a. Pentru foarte multe gaze, valorile secțiunii transversale de ciocnire sunt în domeniul $(0{,}1 \div 1)\cdot 10^{-18}\,m^2$).

Pentru atomii de Ne ($m_r = 20$) la presiunea $p \cong 0{,}5$ tor (presiune tipică în laserul He-Ne) și la temperatura camerei, se obține $T_2 \cong 0{,}6\cdot 10^{-6}$ s, iar lățimea conturului spectral este:

$$\Delta\nu_c = \frac{8}{\pi^{3/2}}\frac{\sigma p}{\sqrt{mkT}} \cong 0{,}53\,\mathrm{MHz}. \tag{2.5}$$

Lățirea determinată de ciocniri este proporțională cu presiunea. La presiuni mici această lățire este mai mică decât cea radiativă (I 7.4). Însă la presiuni mari, de ordinul unei atmosfere (de ex. în cazul laserului cu CO_2) ea reprezintă un mecanism principal de lățire a liniei spectrale (pentru $p = 1\,\mathrm{atm}$, se obține $T_2 = 0{,}4\cdot 10^{-9}$ s și $\Delta\nu_c = 0{,}8\cdot 10^9$ Hz).

2.2 Interacțiunea cu radiația optică a ansamblului de dipoli electrici supuși ciocnirilor

Considerăm cazul unui ansamblu de dipoli, între care se produc ciocniri, supus acțiunii unui câmp *em* armonic exterior. Ciocnirile dintre dipoli determină defazarea întâmplătoare a mișcării oscilatorii.

Conform celor analizate în prg. I 4.2, sub acțiunea câmpului *em* armonic, după un interval de timp, se instaurează un regim staționar de oscilație caracterizat printr-o

valoare dată a amplitudinei (datorită transferului de energie) și a fazei față de faza câmpului perturbator. După fiecare ciocnire (defazare) câmpul perturbator tinde să readucă oscilația la regimul staționar. Prin urmare în ansamblul considerat se manifestă două tendințe: una de defazare, iar celaltă, determinată de câmp, de ordonare. Considerând caracterul statistic al ciocnirilor să stabilim expresia mărimilor $\chi'(\omega)$ și $\chi''(\omega)$.

Fie $x(t)$ - valoarea elongației unui dipol la momentul t; acesta a fost supus ultimei ciocniri la momentul t_0, iar după ciocnire a reluat mișcarea oscilatorie forțată având fazorul elongației inițiale $\widetilde{X} = X_0 e^{i\varphi}$ (fig. 35). Elongația la momentul t, care reprezintă soluția generală a ecuației de mișcare, conține atât termenul care descrie starea staționară cât și pe cel care descrie starea tranzitorie. Ea depinde atât de t_0 și $\widetilde{X}_0$, cât și de fazorul câmpului *em* armonic aplicat și este de forma:

$$x(t;t_0,\widetilde{X}_0) = \widetilde{X}(\omega)e^{i\omega t} + \left[\widetilde{X}_0 - \widetilde{X}(\omega)e^{i\omega t_0}\right]e^{\left(-\frac{\gamma_0}{2}+i\omega_0\right)(t-t_0)} \tag{2.6}$$

(Conform acestei relații, la momentul inițial $t = t_0$ se obține $x(t) = \widetilde{X}_0$ iar pentru $t \gg t_0$, al doilea termen tinde la zero, elongația descriind regimul staționar al oscilațiilor forțate).

Considerăm numărul de dipoli electrici n_V din unitate de volum la momentul t. Dipolii au suferit ultima ciocnire la momente t_0 diferite, iar după ciocnire și-au reluat mișcarea oscilatorie cu fazori $\widetilde{X}(t_0)$ diferiți. Pentru a stabili expresia susceptibilității ansamblului format din n_V dipoli acesta trebuie caracterizat printr-o mișcare medie. În acest scop este necesar să se stabilească răspunsul mediu al dipolilor la un moment dat t, prin aceasta înțelegând medierea pentru valori diferite ale momentului ultimei ciocniri t_0 și pentru fazori inițiali diferiți.

Fazorul inițial conține informații asupra fazei și amplitudinii inițiale a unui dipol imediat după ciocnire. Deoarece după ciocnire fazele diferiților dipoli sunt distribuite cu egală probabilitate în intervalul $(0 \div 2\pi)$rad, iar elongațiile inițiale sunt distribuite cu egală probabilitate între zero și valoarea maximă, valoarea medie a fazorilor inițiali extinsă la toți dipolii ansamblului, este egală cu zero. Prin urmare relația (2.6) devine:

$$x_m(t;t_0) = \widetilde{X}(\omega)\left[e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0}e^{\left(-\frac{\gamma_0}{2}+i\omega_0\right)(t-t_0)}\right] \tag{2.7}$$

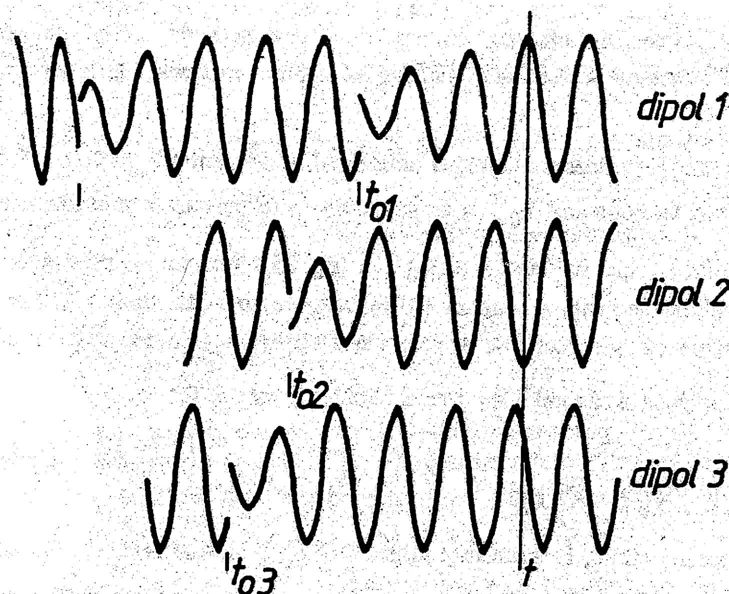


Fig. 35

Să calculăm elongaţia medie a componentelor ansamblului, medierea fiind extinsă asupra momentului ultimei ciocniri (t_0). In acest scop elongaţia $x_m(t;t_0)$ a unui dipol a cărui ultimă ciocnire a avut loc în intervalul $t_0 \div t_0 + \Delta t_0$, se raportează la numărul de dipoli $\Delta n(t_0)$ a căror ultimă ciocnire a avut loc în intervalul Δt_0 şi se mediază pe valorile t_0 anterioare lui t, adică:

(2.8) $$x(t) = \frac{\sum\limits_{t_0 < t} x(t;t_0)\Delta n(t_0)}{\sum\limits_{t_0 < t} \Delta n(t_0)} = \frac{\int_{-\infty}^{t} x(t;t_0) d\,n(t_0)}{\int_{-\infty}^{t} d\,n(t_0)} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{t} \frac{n_v e^{-\frac{t-t_0}{T_2}}}{T_2} \widetilde{X}(\omega)\left[e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0} e^{\left(-\frac{\gamma_0}{2}+i\omega_0\right)(t-t_0)}\right] d t_0}{\int_{-\infty}^{t} \frac{n_v e^{-\frac{t-t_0}{T_2}}}{T_2} d t_0} =$$

$$= \widetilde{X}_m(\omega) e^{i\omega t} \qquad \text{pentru}: -\infty < t_0 \le t,$$

unde:

$$\widetilde{X}_m(\omega) = \widetilde{X}(\omega) \frac{1 + \frac{2i(\omega-\omega_0)}{\gamma_0}}{\left(1 + \frac{2}{\gamma_0 T_2}\right)\left[1 + \frac{2i(\omega-\omega_0)}{\gamma_0 + \frac{2}{T_2}}\right]} =$$

$$= i \frac{e}{m_e \omega \left(\gamma_0 + \frac{2}{T_2}\right)} \frac{1}{1 + \frac{2i(\omega-\omega_0)}{\gamma_0 + \frac{2}{T_2}}} = \widetilde{E}(\omega)$$

Expresia susceptibilităţii ansamblului de dipoli (III 2.4) devine:

(2.9)

(a) $$\chi''(\omega) = -\frac{n_v e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0 \Delta\omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2}\right)} =$$

$$= -\frac{n_v}{\varepsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} \frac{2}{\pi \Delta\omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2}\right)} = \frac{n_v}{\varepsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} g(\omega) \quad ;$$

(b) $$\chi'(\omega) = \frac{n_v}{\varepsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} \frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2} g(\omega).$$

Pentru ansamblul considerat, forma conturului de absorbţie este de tip Lorentz. Datorită defazării întâmplătoare a elongaţiei iniţiale determinată de ciocniri apare o lăţire a conturului, noua laţime:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 + \Delta\omega_c, \qquad (2.10)$$

fiind determinată de suma dintre lăţimea naturală şi lăţimea de ciocniri. Deoarece forma conturului este normată, lăţirea acestuia este însoţită de micşorarea valorii maxime calculate la frecvenţa $\omega = \omega_0$. Conform relaţiei (2.4), contribuţia lăţimii determinată de ciocniri la lăţimea totală depinde de presiunea gazului.

Deoarece datorită ciocnirilor distribuţia fazelor, respectiv a elongaţiei iniţiale, se realizează cu probabilitate egală în intervalul cuprins între $(0 \div 2\pi)\mathrm{rad}$, respectiv zero şi valoarea maximă a elongaţiei, polarizaţia ansamblului supus ciocnirilor, în lipsa câmpului electric, tinde spre o valoare aproape egală cu zero.

2.3 Polarizaţia ansamblului de dipoli supus procesului de ciocnire

Conform celor prezentate în cap. III, substanţa poate fi caracterizată prin mărimea fizică *moment mediu de dipol electric (polarizaţia)*, definită pentru unitatea de volum. Polarizaţia substanţei (III 1.3) implică compunerea vectorială a momentelor de dipol caracteristice componentelor elementare ale substanţei. Dispunerea spaţială reciprocă a acestora este fixată de proprietăţile de simetrie ale ansamblului de dipoli, prin urmare polarizaţia substanţei se va exprima printr-o mărime tensorială. In stare normală (în lipsa interacţiunii substanţei cu câmpurile externe) polarizaţia poate fi egală cu zero (de ex. în cazul gazelor) sau poate fi diferită de zero (substanţa prezintă o polarizaţie iniţială proprie sau permanentă).

Sub acţiunea unui câmp electric extern, într-un ansamblu de dipoli poate fi indusă o anumită polarizaţie, care, pentru valori mici ale intensităţii câmpului, este dată de relaţia (III 1.6), unde mărimea $\tilde{\chi}(\omega)$ - susceptibilitatea electrică, ca şi polarizaţia, reprezintă o caracteristică a substanţei (depinde de proprităţile de simetrie ale acesteia şi se va exprima printr-o mărime tensorială).

Deoarece câmpul *em* radiat de către ansamblu de dipoli depinde de valoarea $\mathbf{P}(\mathbf{R},t)$ a polarizaţiei la un moment dat, în continuare vom analiza câteva particularităţi ale acesteia. Conform prg. I 4.2, evoluţia temporală a momentului de dipol electric (i) supus acţiunii unui câmp electric dependent de timp este descrisă de ecuaţia (I 4.11), a cărei soluţie este de forma:

$$p_{xi}(t) = \left|p_{x_0 i}(t_0)\right| \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-t_0) + i\omega_0(t-t_0) + i\varphi_i\right],$$

unde $p_{x_0 i}$ reprezintă valoarea momentului de dipol la momentul iniţial t_0, φ_i valoarea fazei oscilaţie la acelaşi moment (faza iniţială), ω_0 - frecvenţa proprie de oscilaţie, iar γ - factorul de amortizare.

Polarizaţia momentană reprezintă sumarea valorilor tuturor momentelor de dipol la momentul considerat. Deoarece, la momentul considerat, momentele de dipol prezintă faze diferite, pentru a realiza sumarea, se poate utiliza compunerea fazorială (pe axa orizontală, respectiv verticală este reprezentată partea reală, respectiv cea imaginară a fazorului sau partea *cos*, respectiv *sin* a oscilaţiei). De ex., componenta polarizaţiei după direcţia x va fi de forma:

$$P_x(t) = \sum_{i=1}^{n_v} p_{xi}(t).$$

Dacă presupunem că toţi dipolii din unitatea de volum încep să oscileze la momentul t_0 cu aceeaşi frecvenţă şi fază iniţială (φ_0), atunci polarizaţia va fi dată de expresia:

$$P_x(t) = n_v p_{x_0} \exp\left[\left(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)(t-t_0) + i\varphi_0\right].$$

Polarizaţia ansamblului va depinde de frecvenţa proprie (ω_0) a dipolului individual, se va amortiza cu rata de amortizare γ dipolului individual, iar mărimea iniţială ($n_v p_{x_0}$) va fi foarte mare deoarece s-a considerat că toţi dipolii oscilează în fază (fig. 14a). Acestă situaţie este cunoscută sub denumirea de *ansamblu de dipoli care oscileaza coerent* sau care sunt *complet aliniaţi*.

După cum s-a stabilit în prg. IV 2, prezenţa unui proces de defazare determină, după fiecare, interacţiune, modificări aleatoare ale fazei oscilaţiei (φ_0). In fig. 36b este prezentat rezultatul compunerii a patru fazori ai momentului de dipol defazaţi ca rezultat al acestor procese. Rezultă că procesele de ciocniri micşorează mărimea amplitudinii polarizaţiei macroscopice. Procesul de micşorare a valorii polarizaţiei determinată de defazare are loc independent de micşorarea valorii momentului de dipol individual, determinată de prezenţa proceselor radiative.

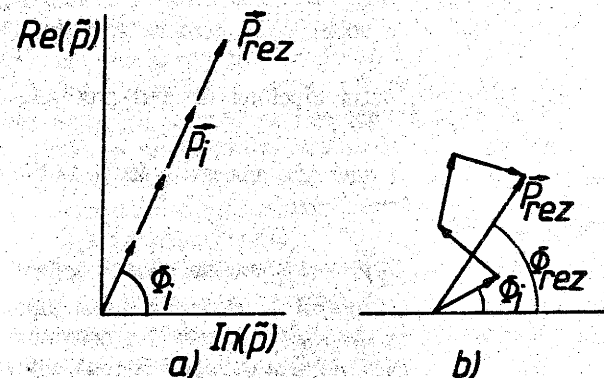


Fig. 36

Dacă valoarea densităţii dipolilor electrici este mare, deoarece fazele individuale sunt distribuite aleator cu egală probabilitate în domeniul $(0 \div 2\pi)\mathrm{rad}$ al diferenţei de fază, valoarea medie a polarizaţiei este egală cu zero:

$$\langle P_x(t) \rangle = 0,$$

iar valoarea rădăcinii din media pătratelor (RMP):

$$\sqrt{\langle P_x^2(t) \rangle} = \sqrt{n_v}\,|p_{xi}(t)| \ll \langle n_v |p_{xi}(t)|,$$

va fi mult mai mică faţă de polarizaţia coerentă. Valoarea RMP a polarizaţiei reprezintă zgomotul în cazul emisiei de dipol, a cărui corespondent, în cazul ansamblului de sisteme atomice este emisia spontană.

Să considerăm că la momentul iniţial (t_0) numărul $n_v(t_0)$ de dipoli oscilează în fază, deci polarizaţia iniţială este:

$$P_x(t_0) = n_v(t_0)p_{x0}.$$

La un moment $t \rangle t_0$ dipolii ansamblului considerat pot fi divizaţi în două grupe:

- un număr $n(t)$ de dipoli, a cărui valoare scade în timp, care nu au fost supuşi la nici o ciocnire (la nici un proces de defazare). Aceştia continuă să oscileze în fază şi le va corespunde polarizaţia macroscopică:

$$P_x(t) = n(t)p_x(t) = n(t)p'_{x0}\cos\omega_0 t.$$

Deoarece numărul dipolilor nedefazaţi (neciocniţi) este dat de relaţia (II 3.3 22'), expresia polarizaţiei macroscopice coerentă este:

$$P_x(t) = n_v \exp\left(-\frac{t - t_0}{T_2}\right) p_{x0} \exp\left[\left(-\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)(t - t_0) + i\varphi_0\right] =$$

$$= P_{x0} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{T_2}\right)(t - t_0) + i\omega_0(t - t_0) + i\varphi_0\right],$$

adică rata descreşterii amplitudinii polarizaţiei coerente este dată de mărimea $\left(\frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{T_2}\right)$, faţă de $\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)$ în cazul dipolului nesupus proceselor de defazare (mărimea γ_0 descrie amortizarea energiei prin procesul radiativ, în timp ce mărimea T_2 este determinată de defazare).

- un număr de dipoli $[n_v(t_0) - n(t)]$, a cărui valoare creşte în timp, care au fost supuşi cel puţin la o ciocnire. Procesul de ciocniri a forţat dipoli să continue procesul de oscilaţie cu faze aleator distribuite. Aceştia vor determina o polarizaţie necoerentă, a cărei valoare medie, dacă numărul de dipoli este mare, tinde la zero, iar valoarea RMP, proporţională cu $\sqrt{n_v(t_0) - n(t)}\,p'_{x0}$ este foarte mică.

Câmpul *em* aplicat ansamblului de dipoli considerat acţionează ca un mecanism de ordonare coerentă care forţează dipolii individuali să intre în oscilaţie cu aceaşi fază. Acesta determină o sumare "coerentă" a elongaţiilor individuale şi ca rezultat apariţia unei polarizaţii macroscopice finite. Rezultatul concurenţei dintre efectul ciocnirilor, măsurat de mărimea T_2, şi efectul de ordonare determinat de câmpul *em* aplicat constă în lăţirea răspunsului ansamblului la câmpul aplicat, însoţită de micşorarea valorii maxime a acestuia.

In cazul câmpurilor *em* obişnuite, mărimea intensităţii câmpului electric este insuficientă pentru a realiza o ordonare apreciabilă în defavoarea efectului de defazare. Ca rezultat polarizaţia macroscopică a ansamblului considerat este mică faţă de valoarea care s-ar obţine atunci când dipolii ar oscila în fază: $\tilde{X}_m(\omega) \ll \tilde{X}(\omega)$ - unde $\tilde{X}(\omega)$ reprezintă fazorul unui dipol electric când nu sunt prezente procesele de defazare. Această situaţie se manifestă în cazul dispozitivelor laser. Situaţii deosebite apar în cazul când ansamblul considerat este supus acţiunii unor pulsuri de câmp *em* de puteri foarte mari; în acest caz câmpul electric este capabil să realizeze o ordonare aproape completă a dipolilor electrici oscilanţi şi, ca rezultat, apar fenomene noi care fac obiectul opticii neliniare.

Din cele prezentate rezultă că polarizaţia indusă în substanţă depinde de caracteristicele de corelare ale câmpului perturbator al radiaţiei optice. Pentru a analiza acest lucru trebuie subliniat faptul că interacţiunea dintre câmp şi ansamblul de sisteme cuantice se reduce la interacţiunea directă dintre un sistem cuantic şi un foton al câmpului. Fazorul momentului de dipol indus în sistemul cuantic (respectiv fazorul câmpului elementar emis de către sistemul cuantic perturbat) depinde de fazorul câmpului *em* perturbator ataşat fotonului.

Dacă câmpurile elementare ataşate fotonilor nu sunt corelate (cazul radiaţiei termice), atunci momentele de dipol induse în diferite sisteme cuantice de diferiţi fotoni (respectiv câmpurile elementare emise) vor fi necorelate, iar valoarea gradului de coerenţă al câmpului emis de către ansamblu va tinde la zero.

Dacă pentru perturbarea ansamblului se foloseşte radiaţie de tip laser, aceasta prezintă o valoare a gradului de coerenţă, atât spaţială cât şi temporală, care se apropie de valoarea unu. Ca rezultat momentele de dipol induse în diferite sisteme cuantice vor fi corelate, atât spaţial cât şi temporal. In acest caz polarizaţia ansamblului prezintă caracteristici noi care se vor manifesta în caracteristicile câmpului radiat de ansamblu.

Intr-un ansamblu de dipoli procesele de defazare acţionează în sensul distrugerii polarizaţiei coerente care ar putea apare în ansamblu. Procesele fizice care determină defazarea mişcării interne a unui dipol faţă de altul sunt:

- în gaze, sistemele atomice aflate într-o mişcare continuă suferă ciocniri elastice şi neelastice. Ambele procese de ciocniri determină defazarea aleatoare a mişcării interne a sistemului atomic.

- în matricea solidă (matrice cristalină sau amorfă dopată cu sisteme atomice care prezintă tranziţii atomice convenabile obţinerii efectului laser), valoarea energiei nivelurilor sistemelor atomice ale ansamblului considerat, respectiv valoarea frecvenţei tranziţiei, este perturbată de prezenţa sistemelor atomice vecine, deci depinde de distanţa dintre sistemul atomic emiţător şi cel al matricei înconjurătoare. Acestă distanţă este modulată de vibraţiile termice ale reţelei matricei deci frecvenţa tranziţiei este

perturbată în timp în mod aleator în jurul frecvenței sistemului atomic izolat. Acesta reprezintă așa numita *lărgire fononică*.

- în cazul unei matrice solidă dopată cu un număr mare de sisteme de dopaj, distanța dintre acestea se micșorează astfel încât se pot influența reciproc. Oscilațiile individuale ale sistemelor atomice active nu mai sunt total independente, ele devin cuplate prin așa numitul *cuplaj dipolar*. Acest cuplaj de asemenea tinde să determine defazarea mișcării oscilatorii. Efectul produs de către acest cuplaj, la rândul lui, este modulat aleator de către mișcarea termică a rețelei cristaline a matricei, care este mai intensă.

3. Lărgirea de tip Doppler a structurii spectrale a câmpului *em* emis de către un ansamblu de dipoli electrici.

Conturul Lorentz (conturul natural sau radiativ) poate fi observat numai folosind metode spectrale speciale, deoarece este deformat de alte efecte de lărgire. In cazul gazelor aflate la presiuni scăzute o contribuție principală revine efectului Doppler.

Dipolii electrici ai unui ansamblu aflat în stare de gaz prezintă o mișcare termică caracteristică ansamblului de particule aflat în echilibru termodinamic caracterizat prin temperatura T. Deoarece dipolii electrici, care reprezintă emițători sau receptori de radiație, sunt în mișcare apare o deplasare a frecvenței de emisie sau de absorbție (deci a întregului contur de emisie sau de absorbție) asociată mișcării. Deplasarea contururilor, ca și mișcarea dipolilor, va fi întâmplătoare și va determina lățirea structurii spectrale a câmpului *em* emis de către ansamblu sau a domeniului spectral de interacțiune a ansamblului cu un câmp *em* exterior Acest mecanism este cunoscut sub denumirea de *lărgire Doppler*. Efectul este de natură relativistă, dar se pot obține rezultate conforme cu determinările experimentale și printr-o tratare clasică.

3.1 Structura spectrală a câmpului *em* emis de ansamblu.

Considerăm un dipol electric caracterizat prin viteza $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ măsurată în sistemul de referință al laboratorului. Sensul de deplasare formează unghiul θ cu direcția de observare a câmpului *em* emis. Datorită efectului Doppler, frecvența câmpului emis de către dipolul în mișcare și înregistrată în sistemul fix al laboratorului este dată de relația:

$$\omega' = \omega_0 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = \omega_0\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right) = \omega_0\left(1+\frac{v_z}{c}\right) = \omega_0 + \delta\omega, \quad (3.1)$$

unde ω_0 reprezintă frecvența proprie de emisie a dipolului. Dacă dipolul se deplasează spre receptor ($\theta = 0$) acesta înregistrează o frecvență mărită, dacă se deplasează în sens opus ($\theta = \pi$) înregistrează o frecvență micșorată, iar dacă se deplasează

perpendicular pe direcția de observare ($\theta = \frac{\pi}{2}$) recptorul nu înregistrează o variație a frecvenței (fig. 37 a).

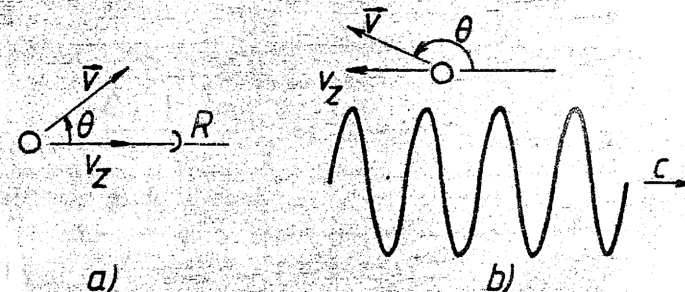


Fig. 37

Receptorul va înregistra frecvența de rezonanță deplasată a dipolului, iar odată cu frecvența de rezonanță este deplasat întreg conturul de emisie determinat de procesele de emisie și de ciocniri. Vitezele de deplasare ale dipolilor ansamblului sunt distribuite în mod aleator atât în mărime cât și în direcție. Densitatea de dipoli $dn_v(v_z)$, a căror viteză este cuprinsă în intervalul de viteze dv_z centrat în jurul componentei v_z a vitezei, este dat de legea de distribuție normată a lui Maxwell:

$$dn_v(v_z) = n_v\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)dv_z, \quad (3.2)$$

unde: $-\infty \langle v_z \langle +\infty$, m - masa dipolului, iar T - temperatura asociată mișcării de translație caracteristică ansamblului aflat în echilibru termodinamic. Distribuția numărului de dipoli funcție de deplasarea frecvenței este dată de relația:

$$dn_v(\delta\omega) = n_v\sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}}\exp\left(-\frac{mc^2(\omega'-\omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right)d(\delta\omega) = n_v\, g_D(\delta\omega)d(\delta\omega) \quad (3.3)$$

unde: $\delta\omega = \omega' - \omega_0 = \frac{\omega_0}{c}v_z$ și $dv_z = \frac{c}{\omega_0}d(\delta\omega)$.

Fiecărui grup de dipoli electrici $dn_v(v_z)$ îi va corespunde o densitate spectrală de flux deplasată în frecvență față de ω_0, datorită efectului Doppler. Funcția spectrală de distribuție a câmpului *em* emis de către ansamblu va reprezenta

înfăşurătoarea densităţilor spectrale de flux corespunzătoare fiecărui grup de dipoli. Lăţimea spectrală a acestei funcţii, conform definiţiei, este dată de:

$$\exp\left(-\frac{mc^2(\omega_1' - \omega_0)}{2\omega_0^2 kT}\right) = \frac{1}{2}, \text{ de unde:}$$

(3.4) $$\Delta\omega_D = 2(\omega_1' - \omega_0) = \sqrt{\frac{8\omega_0^2 kT \ln 2}{mc^2}}.$$

Folosind expresia lăţimii spectrale Doppler, funcţia de distribuţie spectrală devine:

(3.5) $$g_D(\delta\omega) = \frac{2}{\Delta\omega_D}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\omega' - \omega_0}{\Delta\omega_D/2}\right)^2 \ln 2\right],$$

a cărei valoare maximă este:

(3.6) $$g_{D\max} = \frac{2}{\Delta\omega_D}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} = \frac{0{,}932}{\Delta\omega_D}$$

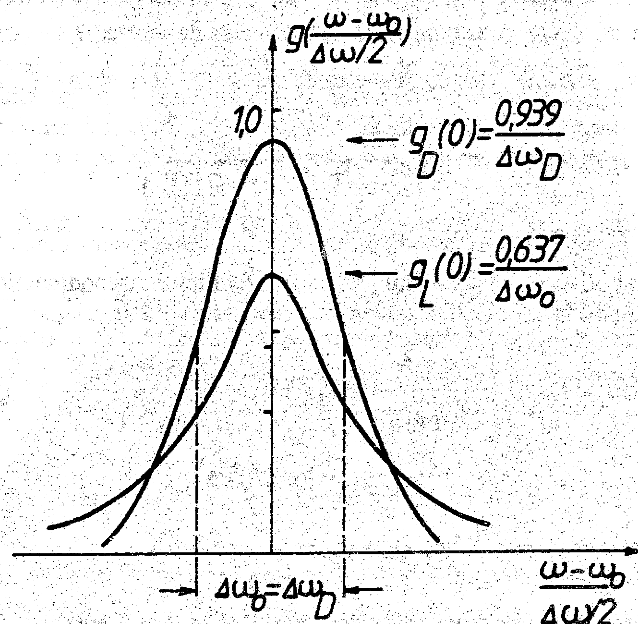


Fig. 38

Funcţia $g_D(\delta\omega)$ este de tip Gauss normată. Deoarece $\Delta\omega_D \rangle\rangle \Delta\omega$ (suma lăţimii radiative şi cea de ciocniri), valoarea maximă a funcţiei Gauss normate este mai mică decât valoarea maximă a funcţiei Lorentz normate $g_L(0) = \frac{0{,}637}{\Delta\omega}$. Reprezentarea grafică a celor două funcţii de distribuţie spectrală normate, în aşa fel încât lăţimile spectrale ale acestora să fie marcate prin segmente de aceeaşi lungime, iar ariile delimitate de funcţii să fie egale, este dată în fig. 38. Se observă că în timp ce conturul Lorentz este caracterizat printr-o descreştere lentă a "aripilor", conturul Gauss, după depăşirea frecvenţelor ce delimitează lăţimea spectrală, se caracterizează printr-o descreştere rapidă spre zero. Răspunsul ansamblului de dipoli în apropierea frecvenţei centrale este mult mai puternic în cazul conturului Gauss, faţă de cel Lorentz. Acceptând definiţia lăţimii spectrale prezentată anterior, în cazul conturului Gauss rămâne în afara lăţimii un domeniu spectral în care răspunsul este suficient de intens. De aceea pentru definirea lăţimii spectrale se consideră uneori drept limite frecvenţele pentru care valoarea maximă a conturului se micşorează de e ori:

$$\Delta\omega_D = \sqrt{\frac{8\omega_0^2 kT}{mc^2}}.$$

In cazul tranziţiei $\lambda = 632{,}8\,nm$ a laserului He-Ne ($m_r = 20$, $T \cong 400\,K$) se obţine $\Delta\omega_D = 1{,}5\,GHz$ (faţă de $\Delta\omega_L = 150\,MHz$), iar în cazul tranziţiei $\lambda = 480\,nm$ a laserului ionic Ar^+ se obţine $\Delta\omega_D = 6\,GHz$, deoarece temperatura mediului activ este mult mai ridicată. In cazul tranziţiei $\lambda = 10{,}6\,\mu m$ a laserului CO_2 ($m_r = 44, T \cong 300\,K$), $\Delta\omega_D = 50\,MHz$, valoarea lăţimii se micşorează deoarece frecvenţa este mult mai mică, iar în cazul maserului NH_3 ($\nu_0 = 24{,}87\,GHz, T \cong 300\,K$) se obţine $\Delta\omega_D = 70\,kHz$, valoare care este de 10^6 ori mai mare decât lăţimea naturală proprie.

3.2 Interacţiunea câmpului *em* cu ansamblul de dipoli care prezintă efect Doppler.

Vom analiza cazul interacţiunii ansamblului de dipoli electrici aflat în echilibru termodinamic cu un câmp *em* armonic care se propagă după direcţia z (fig. 37 b). Deoarece dipolul se deplasează prin câmpul undei, frecvenţa aparentă a acestuia (ω'), determinată în sistemul de referinţă al dipolului în mişcare este diferită de frecvenţa (ω) determinată în sistemul fix al laboratorului. Dacă este considerat fix, într-un interval de timp t, dipolul înregistrează un număr de oscilaţii ale undei dat de relaţia:

$N = \frac{ct}{\lambda} = \nu t$. În acelaşi interval de timp, dacă dipolul se deplasează cu viteza v_z, numărul de oscilaţii înregistrat de acesta va fi:

$$N \pm \Delta N = \frac{ct \pm v_z t}{\lambda} = \left(1 \mp \frac{v_z}{c}\right)\nu t = \nu' t.$$

(Semnul " - " se referă la cazul deplasării în sensul de propagare al undei, iar semnul " + " la deplasarea în sens opus). Receptorul aflat în sistemul de referinţă al dipolului în mişcare înregistrează valoarea ν' a frecvenţei aparente.

Câmpul *em* armonic va interacţiona cu dipolul electric în mişcare numai dacă frecvenţa de rezonanţă (ω_0)(respectiv conturul de interacţiune) a acestuia va coincide cu frecvenţa aparentă:

$$\left(1 \mp \frac{v_z}{c}\right)\omega = \omega_0, \text{ deci:}$$

(3.7)
$$\omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)} \cong \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)\omega_0 = \omega_0 + \delta\omega.$$

Prin urmare pentru unda *em* valoarea frecvenţei de rezonanţă (respectiv conturul de interacţiune) a dipolului în mişcare este deplasată cu mărimea: $\delta\omega = \frac{v_z}{c}\omega_0$.

Considerând interacţiunea dintre dipolii electrici ai unui ansamblu în stare de gaz, aflat în echilibru termodinamic, şi câmpul *em* armonic (ω), să calculăm răspunsul acestuia la interacţiune, adică să determinăm expresiile mărimilor caracteristice $\chi'(\omega)$ şi $\chi''(\omega)$.

Susceptibilitatea electrică, la frecvenţa ω, a ansamblului de dipoli care nu prezintă efect Doppler este:

$$\tilde{\chi}(\omega) = i\chi''(\omega_0)\frac{2}{\pi\Delta\omega}\frac{1}{1 + 2i\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}},$$

unde $\Delta\omega$ reprezintă suma dintre lăţimea radiativă şi cea determinată de ciocniri. Contribuţia unui singur dipol la mărimea susceptibilităţii este:

$$\tilde{\chi}'(\omega) = i\frac{\chi''(\omega_0)}{n_v}\frac{2}{\pi\Delta\omega}\frac{1}{1 + 2i\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}}.$$

Răspunsul total al ansamblului la frecvenţa ω va reprezenta suma răspunsurilor dipolilor care datorită deplasării conturului pot interacţiona cu câmpul *em* exterior la frecvenţa considerată:

(3.8)
$$\tilde{\chi}(\omega) = \int \tilde{\chi}'(\omega, \delta\omega)d\, n_v(\delta\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\frac{\chi''(\omega_0)}{n_v}\frac{2}{\pi\Delta\omega}\frac{1}{1 + 2i\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}} \times$$
$$\times n_v\sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}}\exp\left(-\frac{mc^2(\delta\omega)^2}{2\omega_0^2 kT}\right)d(\delta\omega)$$

Relaţia (3.8) nu poate fi integrată direct, de aceea vor fi analizate cazurile extreme.

- lărgirea Doppler este neglijabilă: $\langle\delta\omega^2\rangle \ll (\Delta\omega)^2$.

Lărgirea Doppler influenţează foarte puţin lărgimea determinată de efectul radiativ şi cel determinat de ciocniri. Factorul Gauss este foarte mic faţă de factorul Lorentz, de aceea se poate considera că acţionează ca o funcţională-δ, prin urmare:

$$\tilde{\chi}(\omega) \propto i\chi''(\omega_0)\frac{2}{\pi\Delta\omega}\frac{1}{1 + 2i\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}}.$$

- lărgirea Doppler este foarte mare: $\langle\delta\omega^2\rangle \gg (\Delta\omega)^2$.

Factorul Gauss este foarte mare faţă de factorul Lorentz, care determină răspunsul individual. Acesta poate fi considerat că acţionează ca o funcţională-δ. Partea imaginară a susceptibilităţii, care descrie schimbul de energie dintre ansamblu şi câmpul *em* excitator, este dată de relaţia:

$$\chi''(\omega) \propto \chi''(\omega_0)\sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}}\exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) \propto \chi''(\omega_0)g_D(\omega).$$

Răspunsul $\chi''(\omega)$ la interacţiune al ansamblului este caracterizat printr-o funcţie Gauss (3.5) a cărei lăţime spectrală este dată de relaţia (3.6).

În ceea ce priveşte mărimea $\chi'(\omega)$, aceasta nu poate fi analizată analitic. Calculele numerice au arătat că forma acestei funcţii, în cazul prezenţei efectului Doppler, este asemănătoare cu cea obţinută în cazul lipsei acestuia: se obţin două maxime opuse ca semn, localizate aprox. la frecvenţele care delimitează lăţimea spectrală, a căror valoare este aprox. egală cu jumătate din valoarea maximă mărimii $\chi''(\omega)$.

4. Conturul spectral de tip Voigt

În prg. 2, respectiv prg. 3 au fost prezentate cazurile lărgirii determinate de procesele de ciocniri, respectiv lărgirea determinată de efectul Doppler. Dar aceste cauze nu pot fi separate, ele fiind prezente simultan. De aceea este necesar să se determine conturul spectral al radiației emise de către ansamblul de dipoli electrici considerând ambele cauze.

După cum s-a stabilit în prg. 3, odată cu deplasarea frecvenței de rezonanță datorită efectului Doppler, se deplasează întregul contur determinat de efectele radiative precum și cele de ciocniri.

Dacă $\omega' = \omega_0 + \omega_0 \frac{v_z}{c}$ reprezintă frecvența de rezonanță a dipolului electric care se deplasează cu viteza v, atunci conturul Lorentz normat, determinat de ciocniri, va fi de forma:

$$g_L(\omega', \omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{1}{\left[\left(\omega_0 + \omega_0 \frac{v_z}{c}\right) - \omega\right]^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2} \tag{4.1}$$

Conturul spectral al câmpului radiațiilor optice emise de către ansamblul considerat se va obține prin integrare asupra distribuției vitezelor (3.2):

$$g(\omega) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)}{\left(\omega_0 + \omega_0 \frac{v_z}{c} - \omega\right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2} d v_z . \tag{4.2}$$

Dacă se fac notațiile:

$$x = \sqrt{4\ln 2}\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_D} = 1{,}67\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_D}, \quad y^2 = \frac{mv_z^2}{2kT}$$

$$b = \sqrt{4\ln 2}\frac{\Delta\omega_0/2}{\Delta\omega_D} = 1{,}67\frac{\Delta\omega_0/2}{\Delta\omega_D}$$

unde: $$\Delta\omega_D = \left(\frac{8kT\omega_0^2 \ln 2}{mc^2}\right)^2,$$

relația (4.2) poate fi scrisă sub forma:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{b^2}{\Delta\omega/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(y+x)^2 + b^2} d y . \tag{4.3}$$

Conturul spectral descris de relația (4.3) este cunoscut sub denumirea de conturul lui Voigt.

Valoarea mărimii $g(\omega)$ pentru o frecvență egală cu frecvența de rezonanță a dipolului în repaus (ω_0)(valoarea maximă), este dată de relația:

$$g(\omega_0) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{b^2}{\Delta\omega/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{y^2 + b^2} d y . \tag{4.4}$$

Integrala (4.4) poate fi scrisă sub forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{y^2 + b^2} d y = \frac{\pi}{b} \exp(b^2) \mathrm{erfc}(b),$$

unde: $\mathrm{erfc}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du$ reprezintă *funcția complementară de erori*, valorile ei fiind date în tabele. Relația (4.4) devine:

$$g(\omega_0) = \sqrt{\frac{4\ln 2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega_D} \exp(b^2) \mathrm{erfc}(b). \tag{4.5}$$

Funcția $\exp(b^2)\mathrm{erfc}(b)$, pentru diferite valori ale mărimii b, este reprezentată grafic în fig. 39. Mărimea $g(\omega_0)$ depinde de raportul dintre lățimea lărgirii determinată de ciocniri și cea determinată de efectul Doppler.

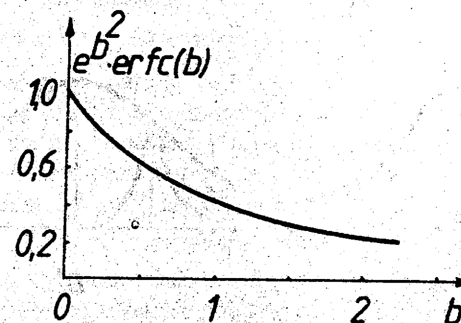


Fig. 39

- Dacă $\Delta\omega \rangle\rangle \Delta\omega_0$, atunci $b \rangle\rangle 1$, iar $\exp(b^2)\mathrm{erfc}(b) \propto \frac{1}{\sqrt{\pi}\, b}$

Prin urmare: $g(\omega_0)=\frac{2\Delta\omega}{\pi}$, care coincide cu valoarea dată de relaţia (I 6.10).

Acesta este cazul "lărgirii determinate de ciocniri". In acest caz $g(\omega, v)$ este foarte larg şi variază lent faţă de distribuţia gaussiană îngustă a vitezelor. Deoarece funcţia Gauss este normată, aceasta acţionează ca o funcţională-$\delta(v)$, iar conturul Voigt se reduce la $g(\omega, v=0)$, care reprezintă conturul tip Lorentz determinat de ciocniri (fig. 40 a).

- Dacă $\Delta\omega \ll \Delta\omega_0$ (cazul "lărgirii determinate de efect Doppler"), atunci $b \ll 1$, iar $\exp(b^2)\operatorname{erfc}(b)\cong 1$, prin urmare:

$$g(\omega_0)=\frac{2}{\Delta\omega_D}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}},$$

care coincide cu valoarea dată de relaţia (3.6). In acest caz conturul de ciocniri acţionează ca o funcţională-$\delta\left(\omega_0+\omega\frac{v_z}{c}-c\right)$, iar conturul Voigt se reduce la conturul Doppler. Această condiţie se realizează în majoritatea cazurilor experimentale, exceptând cazul presiunilor înalte sau cel al interacţiunii ansamblului de dipoli aflat în echilibru termodinamic cu un fascicul colimat de particule (fig. 40 b).

- Pentru valori arbitrare ale parametrului b, valoarea mărimii $g(\omega_0)$ se obţine conform relaţiei (4.4), folosind valorile tabelate ale funcţiei $\operatorname{erfc}(b)$.

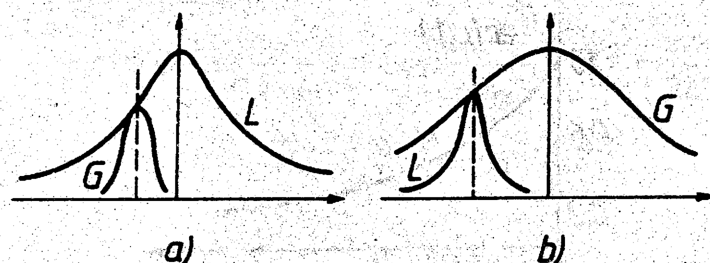


Fig.40 a,b

- Pentru valori arbitrare atât ale parametrului b cât şi ale frecvenţei ω, valorile conturului $g(\omega)$ sunt date de relaţia (4.3), care poate fi evaluată folosind valorile tabelate ale funcţiei:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-y^2)}{(y+x)^2+b^2}dy=\frac{\pi}{b}\operatorname{Re}\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-y^2)}{y+x+ib}dy\right)=\frac{\pi}{b}\operatorname{Re}w(x+ib),$$

unde w reprezintă *"funcţia de erori cu argument complex"*. In acest caz conturul spectral Voigt este descris de relaţia:

$$g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{b}{\Delta\omega/2}\operatorname{Re}w(x+ib)=\sqrt{\frac{4\ln 2}{\pi}}\frac{1}{\Delta\omega_D}\operatorname{Re}w(x+ib)=$$

$$=\frac{0{,}939}{\Delta\omega_D}\operatorname{Re}w(x+ib)$$

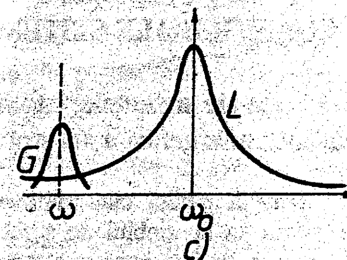


Fig. 40 c

- Conturul Voigt prezintă o comportare deosebită pentru frecvenţe situate la limita lui: $|\omega-\omega_0| \gg \Delta\omega_D, \Delta\omega$, adică pentru frecvenţe situate departe de frecvenţa centrală şi mult în afara semilăţimii conturului Doppler, respectiv de ciocniri. Pentru a face o analiză cantitativă trebuie remarcat faptul că profilul Voigt reprezintă produsul a două contururi, fiecare fiind centrat în jurul unei valori. Prin urmare valoarea maximă a unei funcţii se suprapune peste "aripa" îndepărtată a celeilalte (fig. 40c). Odată cu variaţia lui ω, conturul Gauss, faţă de conturul Lorentz, tinde la zero mai repede. Pentru valori mari ale lui ω, contribuţia principală la valoarea lui $g(\omega, v)$ revine "aripei" funcţiei Lorentz corespunzătoare dipolilor care se deplasează cu viteza medie; contribuţia Gauss este mică, deoarece numărul de dipoli a căror frecvenţă este deplasată la frecvenţa considerată (ω) este mic, viteza necesară acestei deplasări fiind mare. In acest caz funcţia Voigt poate fi înlocuită cu funcţia Lorentz: $g(\omega)\propto\frac{\Delta\omega/\pi}{(\omega-\omega_0)^2}$, conturul, în acest domeniu, fiind asemănător cu cel de tip Lorentz (de ciocniri), deşi lărgirea este determinată de efectul Doppler.

Cap. V

CARACTERISTICI CUANTICE ALE SISTEMELOR ATOMICE

1. Nivelurile de energie ale sistemelor atomice şi lăţimea energetică a acestora.

Concepţiile actuale relativ la modul cum sunt emise radiaţiile *em* optice, precum şi la interacţiunea acestora cu ansamblul de sisteme atomice se bazează pe teoria cuantică. Concepţiile cuantice au fost introduse, sub forma unor postulate, de către Nils Bohr în 1913 şi, pe baza acestora, el a reuşit să explice spectrul energetic al celui mai simplu atom. Ulterior s-a constatat că acestea prezintă un caracter foarte general, lor supunându-li-se toate sistemele aparţinând microcosmosului, astfel încât în momentul actual postulatele lui Bohr pot fi considerate legi cuantice fundamentale cărora li se supune orice sistem atomic. Prin sistem atomic (sistem cuantic) se înţelege atomul şi ionul atomic, molecula şi ionul molecular pozitiv sau negativ şi sisteme asociate de atomi sau de molecule.

Relativ la energia internă a unui sistem atomic, Bohr a introdus două postulate şi anume:

- Un sistem atomic poate exista numai în anumite stări staţionare de energie ale mişcării lui interne. Aceste stări formează un şir discret, fiecare stare fiind caracterizată printr-o valoare bine precizată a energiei interne. Pentru un sistem atomic dat succesiunea valorilor energiei interne poate fi complet discretă sau complet continuă sau parţial discretă şi parţial continuă.

- Un sistem atomic poate trece dintr-o stare energetică în alta modificându-şi energia internă. Dacă trecerea se realizează de pe un nivel de energie mai mică pe unul cu energie mai mare (creşte energia internă), sistemul primeşte din exterior cantitatea de energie corespunzătoare. Dacă trecerea se realizează de pe un nivel energetic superior spre unul inferior, sistemul cedează exteriorului o cantitate de energie, aceasta regăsindu-se sub formă de radiaţie *em* sau sub altă formă de energie. Conform acestui postulat, pentru a emite radiaţie *em* sistemul atomic trebuie să se afle pe un nivel energetic excitat, adică trebuie să-şi mărească energia internă pe seama celei

primite din exterior, iar variaţia energiei lui interne este regăsită, ca rezultat al dezexcitării, sub forma unei anumite cantităţi de energie *em*, caracterizată printr-o anumită frecvenţă, dată de relaţia:

$$E_m - E_n = \hbar\nu_{mn} \quad (E_m - E_n = \hbar\omega_{mn}, \text{ unde: } \hbar = h/2\pi),$$

unde E_m şi E_n reprezintă energia internă a sistemului în stările staţionare între care are loc tranziţia, iar $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ - constanta lui Planck.

Caracteristica principală a unui *nivel de energie* este valoarea corespunzătoare a *energiei interne* a sistemului. Corespunzător unei valori date a energiei, sistemul atomic se poate afla într-o stare staţionară bine determinată sau în mai multe stări staţionare, care se deosebesc între ele prin anumite proprietăţi. In primul caz nivelul de energie, (starea sistemului), se numeşte *nedegenerat*, iar în al doilea caz este cunoscut sub denumirea de *degenerat*. Numărul de stări independente ale sistemului cărora le corespund acelaşi nivel de energie (valoare a energiei) reprezintă *gradul de degenerare* (g_m) al nivelului energetic (m) al sistemului. Dacă sistemul atomic este supus unor interacţiuni suplimentare, stările independente degenerate ale acestuia interacţionează diferit cu factorul extern, ceea ce determină variaţii diferite ale energiei nivelului. In acest mod este posibil să se realizeze situaţia de corespondenţă univocă; fiecărei stări independente, anterior degenerată, să-i corespundă o anumită valoare a energiei. In acest mod se înlătură degenerarea, iar nivelul energetic considerat se despică în g_m niveluri. Gradul de degenerare reprezintă o caracteristică importantă a nivelului de energie. Printre altele el determină popularea nivelului energetic cu sisteme atomice, de aceea mai este cunoscut şi sub denumirea de *pondere statistică*.

Nivelurile de energie introduse de către principiul lui Bohr nu sunt caracterizate printr-o valoare bine determinată a energiei, ceea ce ar implica o valoare bine determinată a frecvenţei. Fiecare nivel este caracterizat printr-un interval de energie (ΔE_m), denumit *lăţime energetică a nivelului*, centrat pe valoarea medie a energiei acestuia (fig. 19). Respectiv tranziţia între două niveluri de energie va fi caracterizată prin *lăţimea energetică* (ΔE_{mn}) *a tranziţiei* (sau a liniei spectrale), egală cu suma lăţimilor energetice ale nivelurilor între care are loc tranziţia:

$$\Delta E_{mn} = \Delta E_m + \Delta E_n .$$

Pentru un sistem atomic liber, lăţimea energetică a nivelului, respectiv a tranziţiei între două niveluri, reprezintă *lăţimea naturală* (sau *radiativă*).

Evaluarea lăţimii energetice a unui nivel de energie poate fi efectuată pe baza relaţiilor cuantice de incertitudine referitoare la timp şi energie, introduse de către Heisenberg: dacă durata de existenţă a unui sistem este Δt, incertitudinea asupra aprecierii energiei acestuia este ΔE, iar cele două mărimi satisfac relaţia:

$$\Delta E \cdot \Delta t \cong \hbar .$$

In cazul unui sistem atomic caracterizat prin valoarea E_m a energiei lui interne, timpul mediu de viaţă în această stare este τ, iar lăţimea energetică (incertitudinea asupra valorii lui E_m) va fi:

(1.1) $$\Delta E_m \cdot \tau_m \cong \hbar .$$

Prin urmare un sistem atomic a cărui energie este egală cu cea a nivelului fundamental este caracterizat printr-un timp mediu de viaţă infinit lung, iar lăţimea energetică a acestuia tinde la zero. Dacă timpul mediu de viaţă al sistemului aflat pe nivelul fundamental este limitat în timp (de ex. datorită fenomenului de absorbţie sistemul trece de pe nivelul energetic fundamental pe unul superior), atunci lăţimea energetică a stării fundamentale devine finită.

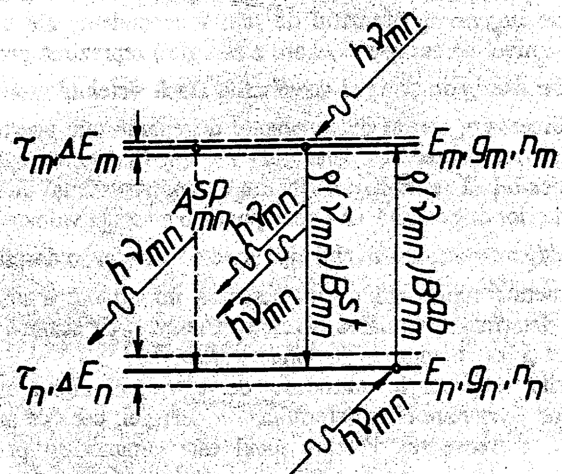


Fig. 41

(1.1) rezultă:

(1.2a) $$\Delta E_m \cong \frac{\hbar}{\tau_m},$$

iar lăţimea energetică exprimată în unităţi de frecvenţă este:

(1.2b) $$\Delta\nu_m \cong \frac{1}{2\pi\tau_m}.$$

Dacă considerăm timpul mediu de viaţă al sistemului atomic de ordinul timpului de viaţă radiativ al dipolului electric oscilant $(10^{-8}\,\mathrm{s})$, atunci:

$\Delta\nu_m \cong \dfrac{1}{2\pi\cdot 10^{-8}} \cong 10^7\ \mathrm{Hz}$. Lăţimea energetică a tranziţiei exprimată în unităţi de frecvenţă este:

(1.3) $$\Delta\nu_{mn} = \Delta\nu_m + \Delta\nu_n \cong \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n}\right).$$

2. Probabilităţile tranziţiilor spontane şi forţate.

Să analizăm un ansamblu de sisteme atomice identice caracterizat prin concentraţia (densitatea) n_v a sistemelor. Considerăm două niveluri energetice ale sistemului caracterizate prin energia E_m şi E_n ($E_m > E_n$). Din numărul n_v de sisteme, n_m respectiv n_n au energia E_m respectiv E_n. Valorile n_m respectiv n_n reprezintă densităţile populaţiei de sisteme atomice a nivelurilor energetice (fig. 41).

Deoarece energia E_m este mai mare decât cea a stării fundamentale, sistemul nu se află într-o stare energetică stabilă; el are tendinţa de a trece după un interval de timp pe un nivel energetic inferior sau pe cel fundamental. Posibilitatea trecerii între diferite niveluri energetice este guvernată de legi cuantice specifice. Pentru moment considerăm că tranziţia între nivelurile E_m şi E_n este permisă de legile cuantice.

2.1 Fenomenul de emisie spontană.

Sistemele atomice (n_m) care populează nivelul energetic E_m pot trece pe nivelul inferior E_n, trecerea fiind instantanee şi însoţită de emisia unui foton a cărui frecvenţă este determinată de relaţia:

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

Procesul de trecere nu este influenţat de factori externi, iar momentul emisiei fotonului (momentul tranziţiei), precum şi direcţia de emisie a acestuia au un caracter statistic. De asemenea procesul este independent de celelalte procese de acelaşi tip.

Intr-un interval de timp Δt, densitatea de sisteme atomice care efectuează această tranziţie (care este identică ca valoare cu numărul corespunzător de fotoni emişi în mod spontan) este proporţională cu densitatea populaţiei nivelului (n_m) şi cu intervalul de timp considerat, coeficientul de proporţionalitate fiind mărimea A_{mn}:

$$\Delta_{mn}^{\text{em. spontană}} = A_{mn} n_m \Delta t.$$

Mărimea:

(2.1) $$w_{mn}^{sp} = A_{mn} = \frac{\Delta n_{mn}^{sp}}{n_m \Delta t},$$

numită *coeficientul lui Einstein pentru emisie spontană*, reprezintă fracţiunea din numărul de sisteme atomice care emit în mod spontan în unitate de timp sau probabilitatea ca fenomenul să se producă. Fotonii emişi de către sistemele atomice cu probabilitate egală în toate direcţiile, sunt independenţi, adică fazele undelor asociate lor nu sunt corelate, valoarea acestora variind aleator, cu egală probabilitate, între $(0 \div 2\pi)$rad. De asemenea polarizarea fotonilor (direcţia de acţiune a câmpului electric al undei asociată fotonului corespunzătoare la diferiţi fotoni) este orientată aleator, cu probabilitate egală, în toate direcţiile, într-un plan perpendicular la direcţia de propagare.

2.2 Fenomene forţate.

(a) Absorbţia radiaţiei em de către sistemele atomice.

Dacă ansamblul de sisteme atomice este supus acţiunii unui câmp *em* optic a cărui frecvenţă este egală cu frecvenţa unei tranziţiei a sistemului ($\nu = \nu_{mn}$), atunci apare un proces de interacţiune între câmp şi sistem, care constă în tranziţia acestuia de pe nivelul energetic inferior E_n pe cel superior E_m. Se consideră că tranziţia are loc în mod instantaneu. Procesul este forţat şi prezintă un pronunţat caracter de rezonanţă. Ca rezultat al acestui proces, câmpul *em* pierde un foton, iar energia internă a sistemului atomic creşte cu valoarea energiei fotonului.

Densitatea sistemelor atomice ce efectuiază această tranziţie într-un interval de timp Δt este proporţională cu densitatea populaţiei nivelului energetic inferior (n_n), densitatea de radiaţie a câmpului *em* la frecvenţa $\nu = \nu_{mn}$ şi cu intervalul de timp Δt:

$$\Delta n_{nm}^{ab}(\nu_{nm}) = B_{nm} n_n \rho(\nu_{nm}) \Delta t.$$

Mărimea:

(2.2) $$B_{nm} = \frac{1}{\rho(\nu_{nm})} \frac{\Delta n_{nm}^{ab}(\nu_{nm})}{n_n \Delta t},$$

numită *coeficientul lui Einstein pentru absorbţie*, reprezintă fracţiunea din numărul de sisteme atomice capabile să prezinte fenomenul de absorbţie, care au absorbit fotoni de frecvenţa ν_{mn} într-un interval de timp egal cu unitatea, raportată la unitatea de densitate de energie a câmpului *em*. Mărimea:

(2.3) $$w_{nm}^{ab} = B_{nm} \rho(\nu_{nm}) = \frac{\Delta n_{nm}^{ab}(\nu_{nm})}{n_n \Delta t},$$

reprezintă fracţiunea din sistemele atomice considerate care absorb fotoni de frecvenţă ν_{mn} în unitate de timp sau probabiltatea procesului de absorbţie.

(b) Emisia stimulată.

Dacă nivelul energetic superior E_m este populat cu sisteme atomice (n_m), atunci câmpul *em* (fotonii) cu frecvenţa $\nu = \nu_{mn}$ interacţionează cu sistemele atomice aflate pe nivelul excitat şi le forţează să efectueze tranziţia spre nivelul inferior E_n, care se consideră instantanee. Procesul este forţat şi de asemenea prezintă un pronunţat caracter de rezonanţă. Ca rezultat al acestui proces, sistemul atomic îşi micşorează energia internă, aceasta fiind regăsită în câmpul *em*, sub forma unui foton. Einstein a arătat că radiaţia obţinută ca rezultat al acestui proces trebuie să prezinte aceleaşi caracteristici ca şi radiaţia stimulatoare: frecvenţa, faza oscilaţiei, direcţia de propagare, precum şi starea de polarizare sunt identice.

Densitatea de sisteme atomice ce trec de pe nivelul energetic superior pe cel inferior prin efectul de emisie stimulată în intervalul de timp Δt, este proporţională cu densitatea populaţiei nivelului superior, cu densitatea de radiaţie (densitatea de fotoni) a câmpului *em* şi cu intervalul de timp Δt, coeficientul de proporţionalitate fiind mărimea B_{mn}:

$$\Delta n_{mn}^{st}(\nu_{nm}) = B_{mn} n_m \rho(\nu_{mn}) \Delta t.$$

Mărimea:

(2.4) $$B_{mn} = \frac{1}{\rho(\nu_{mn})} \frac{\Delta n_{mn}^{st}(\nu_{mn})}{n_m \Delta t},$$

coeficientul lui Einstein pentru emisie stimulată, reprezintă fracţiunea din densitatea populaţiei stării superioare care efectuiază tranziţia $m \to n$ în mod stimulat, într-un interval de timp egal cu unitatea, raportată la unitatea de densitate de energie a câmpului *em*. Mărimea:

(2.5) $$w_{mn}^{st} = B_{mn} \rho(\nu_{mn}) = \frac{\Delta n_{mn}^{st}(\nu_{mn})}{n_m \Delta t},$$

reprezintă fracţiunea din densitatea populaţiei stării superioare supusă efectului de emisie stimulată în unitate de timp sau probabilitatea procesului de emisie stimulată.

Mărimile A_{mn}, B_{mn} şi B_{nm} depind numai de proprietăţile nivelelor energetice între care are loc tranziţia (deci caracterizează tranziţia cuantică) şi nu depind de temperatura ansamblului de sisteme cuantice. Spre deosebire de cazul emisiei spontane, probabilitatea proceselor stimulate depinde de densitatea de radiaţie a câmpului *em* excitator, dar caracterul forţat nu schimbă natura întâmplătoare a acestora.

3. Relaţiile dintre coeficienţii lui Einstein.

Legătura dintre aceşti coeficienţi a fost stabilită de către Einstein analizând interacţiunea câmpului *em* al radiaţiei termice de echilibru cu un ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic. Conform distribuţiei Boltzman, densitatea populaţiei nivelului energetic E_m, dacă ansamblul se află în echilibru termodinamic la temperatura T, este dată de relaţia:

$$n_m = \frac{n_v g_m e^{-E_m/kT}}{\sum_m g_m e^{-E_m/kT}}, \tag{3.1}$$

unde n_v reprezintă densitatea totală a ansamblului, iar sumarea se extinde la toate nivelurile energetice ale sistemului atomic. Einstein a considerat că în prezenţa radiaţiei termice de echilibru, când devin posibile şi tranziţiile stimulate alături de cele spontane, nu se modifică tipul de distribuţie a sistemelor atomice pe stările energetice. Aceasta înseamnă că numărul mediu de fotoni emis de ansamblu este egal cu cel absorbit. In aceste condiţii, pentru orice temperatură, populaţiile celor două stări energetice trebuie să îndeplinească condiţia:

$$n_n w_{nm}^{ab} = n_m \left(w_{mn}^{sp} + w_{mn}^{st}\right) \tag{3.2}$$

sau, folosind (3.1), se obţine:

$$w_{nm}^{ab} g_n \exp(-E_n/kT) = g_m \left(w_{mn}^{sp} + w_{mn}^{st}\right)\exp(-E_m/kT),$$

de unde:

$$\frac{g_n}{g_m}\exp\left(\frac{E_m - E_n}{kT}\right) = \frac{w_{mn}^{sp} + w_{mn}^{st}}{w_{nm}^{ab}} = \frac{A_{mn}}{B_{nm}^{ab}\rho(\nu_{mn})} + \frac{w_{mn}^{sp}}{B_{nm}^{ab}}. \tag{3.3}$$

Relaţia (3.3) trebuie îndeplinită şi la temperaturi mari ($T \to \infty$), când densitatea de radiţie creşte foarte mult, ceea ce conduce la condiţiile:

$$A_{mn} \langle\langle B_{nm}^{ab}\rho(\nu_{nm}) \text{ şi } \exp(h\nu_{mn}/kT) \cong 1.$$

Aceste condiţii implică următoarea legătură între coeficienţii lui Einstein:

$$g_n B_{nm}^{ab} = g_m B_{mn}^{st} \tag{3.4}$$

(daca cele doua niveluri sunt nedegenerate $g_m = g_n = 1$, atunci $B_{nm}^{ab} = B_{mn}^{st}$).

Din (3.3), folosind (3.4), rezultă:

$$\rho(\nu_{mn}) = \frac{A_{mn}}{B_{mn}} \frac{1}{\exp(h\nu_{mn}/kT) - 1}.$$

Deoarece câmpul *em* care interacţionează cu ansamblul de sisteme atomice este de tipul radiaţiei termice de echilibru, densitatea de energie a acestuia este descrisă de legea lui Planck, care, pentru frecvenţa ν_{mn} este dată de relaţia:

$$\rho(\nu_{mn}) = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(h\nu_{mn}/kT) - 1}. \tag{3.5}$$

Prin urmare coeficienţii lui Einstein trebuie să îndeplinească relaţia:

$$\frac{A_{mn}}{B_{mn}} = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3}. \tag{3.6}$$

Aceste relaţii, obţinute în condiţiile interacţiunii radiaţiei termice de echilibru cu ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic, sunt valabile şi în condiţiile de neechilibru, deoarece atât relaţiile cât şi coeficienţii lui Einstein nu depind de temperatură.

3.1 Coeficienţii diferenţiali a lui Einstein.

In prg. 2, pentru a caracteriza procesele de emisie şi de absorbţie ale fotonului au fost introduşi coeficienţii lui Einstein corespunzători acestor procese, care reprezintă *coeficienţi integrali*. Aceşti coeficienţi depind şi de alţi parametrii: direcţia emisiei spontane, respectiv direcţia fasciculului excitator, starea de polarizare a radiaţiei precum şi de frecvenţă. Pentru a considera aceşti parametrii, prin definiţie se introduc *coeficienţii diferenţiali a lui Einstein.*

Probailitatea de emisie spontană a fotonului în intervalul de frecvenţe $\omega \div \omega + d\omega$, în unghiul solid $d\Omega$ şi caracterizat prin polarizarea α este descrisă de relaţia:

$$d\,w_{mn}^{sp} = a_{mn_\alpha}(\omega,\Omega)d\omega d\Omega, \tag{3.7}$$

iar probabilitatea integrală va fi:

$$w_{mn}^{sp} = A_{mn} = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_\omega \int_\Omega a_{mn_\alpha}(\omega,\Omega)d\omega d\Omega. \tag{3.8}$$

Analog se introduc coeficienţii diferenţiali pentru emisie stimulată $b_{mn}(\omega,\Omega)$ şi absorbţie $b_{nm}(\omega,\Omega)$, între care există relaţiile:

$$\frac{a_{mn_\alpha}(\omega,\Omega)}{b_{mn_\alpha}(\omega,\Omega)} = \frac{A_{mn}}{B_{mn}} = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \text{ şi } g_m b_{mn_\alpha}(\omega,\Omega) = g_n b_{nm_\alpha}(\omega,\Omega).$$

4. Timpul de viaţă al stărilor excitate.

Sistemele atomice ce populează un nivel energetic excitat, aflându-se într-o stare de neechilibru energetic, îl părăsesc efectuând tranziţia de emisie spontană, permisă de regulile de selecţie, spre nivelurile energetice inferioare. In acest mod nivelul se depopulează în timp. Din acest punct de vedere el poate fi caracterizat prin

timpul de viață al sistemului atomic pe nivelul energetic considerat. Procesul de depopulare prezintă un caracter statistic.

Să analizăm variația în timp a populației nivelului energetic determinată de emisia spontană. Densitatea populației nivelului E_m, la momentul inițial t_0 este n_{0m}, iar la momentul (t_0+t) devine $n_m(t)\langle n_{0m}(t_0)$ (după momentul t_0 nu au mai avut loc procese de excitare). Într-un interval de timp dt, micșorarea densității populației dn_{0m} prin tranziții spontane spre nivelul energetic E_n, este dată de relația:

(4.1) $$d(n_m)_n = -A_{mn}n_m(t)dt, \text{ de unde:}$$

(4.2) $$A_{mn} = -\frac{1}{n_m(t)}\frac{d(n_m)_n}{dt},$$

adică probabilitatea tranziției spontane este egală cu descreșterea relativă a numărului de sisteme atomice în unitate de timp determinată de această tranziție. Probabilitatea este determinată de proprietățile cuantice ale stării și nu depinde de timp, adică la orice moment probabilitatea de emisie a fotonului de către sistemul excitat este aceeași, indiferent de momentul când are loc emisia.

Micșorarea populației nivelului E_m se produce în mod independent, pe seama fiecărei tranziții spontane de pe nivelul E_m pe toate nivelurile inferioare E_i (fig. 42):

(4.3) $$-dn_m = -\sum_{i\langle m} d(n_m)_i = \left(\sum_{i\langle m} A_{mi}\right) n_m(t)dt = A_m n_m(t)dt,$$

de unde:

(4.4) $$A_m = \sum_{i\langle m} A_{mi} = -\frac{1}{n_m(t)}\frac{dn_m}{dt},$$

reprezintă probabilitatea totală a tranzițiilor spontane de pe nivelul E_m pe toate nivelurile E_i inferioare acestuia.

Integrarea ecuației diferențiale (4.3) conduce la relația:

(4.5) $$n_m(t) = n_{0m}\exp(-A_m t),$$

adică populația nivelului energetic, datorită tranzițiilor spontane, scade după o lege exponențială. Folosind (4.4), din relația (4.3) se obține:

(4.6) $$-\frac{1}{n_{0m}}\frac{dn_m}{dt} = A_m\exp(-A_m t),$$

care reprezintă probabilitatea ca un sistem atomic să prezinte timpul de viață egal cu t în starea excitată.

Deoarece diferite sisteme atomice prezintă timpuri de viață diferite în starea excitată, se introduce *timpul mediu de viață* al sistemului atomic în starea considerată:

$$\langle t\rangle = \tau_m = \int_0^{+\infty} t A_m \exp(-A_m t)dt =$$

(4.7) $$= \frac{1}{A_m}\int_0^{+\infty}(A_m t)\exp(-A_m t)d(A_m t) = \frac{1}{A_m} = \frac{1}{\sum_{i\langle m} A_{mi}} = \sum_{i\langle m}\tau_{mi}$$

Conform relației (4.5), timpul mediu de viață al stării excitate reprezintă timpul după care populația stării excitate scade de e ori față de cea inițială. Timpul mediu de viață, fiind determinat de mărimea A_m, reprezintă o caracteristică a nivelului energetic și nu al unei tranziții izolate. Timpul mediu de viață al stărilor electronice ale sistemelor atomice este de ordinul a 10^{-8} s, ceea ce conduce la valori de ordinul $A_m \cong 10^8\ s^{-1}$.

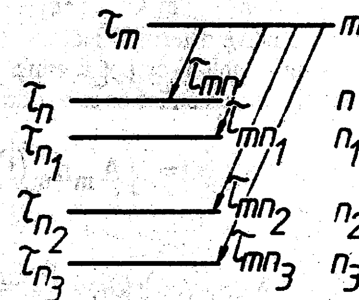


Fig. 42

Dacă probabilitatea tranzițiilor spontane de pe nivelul excitat pe cele inferioare este foarte mică sau nulă, timpul mediu de viață al acestuia devine foarte mare ($\tau_m \to \infty$). Un asemenea nivel energetic se numește *metastabil* și favorizează obținerea de densități de populație foarte mari (înmagazinare de energie), de aceea asemenea niveluri au un rol deosebit în funcționarea sistemelor laser.

Depopularea unui nivel excitat se poate realiza nu numai prin tranziții spontane însoțite de emisie de fotoni (*tranziții radiative*), ci și prin fenomene în care variația energiei interne a sistemului atomic este transmisă mediului înconjurător (*tranziții neradiative*). Variația energiei poate fi transmisă unor sisteme atomice de alt gen prin procese de ciocniri neelastice (în cazul moleculelor aceste ciocniri pot modifica energia lor de rotație sau de vibrație), peretelui tubului de descărcare la ciocnirea sistemului

atomic excitat cu acesta sau rețelei cristaline (interacțiune foton - fonon) când sistemul atomic excitat se află înglobat în rețea. Un asemenea proces de asemenea are un caracter statistic, iar nivelul energetic poate fi caracterizat prin *probabilitatea tranziției neradiative* (γ_m) dată de relația:

$$\gamma_m = -\frac{1}{n_m(t)}\frac{dn_m(t)}{dt}. \qquad (4.8)$$

In aceste condiții, descreșterea totală a populației nivelului energetic este dată de relația:

$$dn_m(t) = (A_m + \gamma_m)n_m(t)dt, \qquad (4.9)$$

respectiv, legea dezexcitării devine:

$$n_m(t) = n_{0m}\exp[-(A_m+\gamma_m)t], \qquad (4.10)$$

nivelul energetic este caracterizat prin timpul de viață:

$$\tau'_m = \frac{1}{A_m+\gamma_m} = \frac{\tau_m}{1+\gamma_m/A_m}, \qquad (4.11)$$

iar lățimea energetică se mărește:

$$\Delta E_m \cong \frac{\hbar}{\tau'_m} = \frac{\hbar}{\tau_m}\left(1+\frac{\gamma_m}{A_m}\right). \qquad (4.12)$$

Prezența tranzițiilor neradiative determină atât micșorarea timpului de viață al stării excitate, cât și a numărului de fotoni ce pot fi emiși în mod spontan. Numărul acestora este egal cu numărul de sisteme atomice ce se vor dezexcita radiativ:

$$n'_{0m} = \int_0^{+\infty} dn_m^{sp}(t) = \int_0^{+\infty} A_m n_m(t)dt =$$

$$= A_m\int_0^{+\infty} n_{0m}\exp[-(A_m+\gamma_m)t]dt = \frac{n_{0m}A_m}{A_m+\gamma_m} = \frac{n_{0m}}{1+\frac{\gamma_m}{A_m}} \qquad (4.13)$$

Acest fenomen determină micșorarea densității de radiație corespunzătoare tranziției spontane (extincția tranziției). Pentru caracterizarea lui se introduce noțiunea de *randament cuantic* al emisiei ca fiind numeric egal cu raportul dintre numărul de fotoni emiși la numărul de fotoni absorbiți (care este egal cu numărul inițial de sisteme atomice excitate n_{0m}):

$$\beta_m = \frac{n'_{0m}}{n_{0m}} = \frac{A_m}{A_m+\gamma_m}. \qquad (4.14)$$

5. Distribuția sistemelor atomice în lățimea energetică a nivelului.

In prg. 1 s-a stabilit că fiecare nivel energetic este caracterizat printr-o lățime energetică, determinată de mărimea timpului de viață a sistemului atomic pe nivelul energetic considerat. Tranziția spectrală între două niveluri energetice trebuie să fie caracterizată printr-o lățime spectrală (sau energetică) corespunzătoare lățimii energetice a celor două niveluri. In cazul unui ansamblu de sisteme atomice, acestea populează nivelurile energetice, popularea fiind caracterizată prin mărimea densității de populație. Se pune problema stabilirii formei funcției de distribuție a densității de populație după energiile corespunzătoare lățimii energetice a unui nivel. Aceasta va determina funcția de distribuție spectrală a fluxului de energie corespunzător tranziției între cele două niveluri. Funcția de distribuție spectrală trebuie să coincidă cu cea obținută pe baza unor considerente ale electrodinamicii clasice, care a fost confirmată prin determinări experimentale.

Plecând de la aceste cerințe, într-un ansamblu format din sisteme atomice aflate în repaus, se consideră funcția de distribuție a sistemelor atomice după energie drept o funcție de tip Lorentz normată și caracterizată prin lățimea corespunzătoare. Lățimea energetică a nivelului (ΔE_m) corespunde valorii energiei pentru care populația corespunzătoare este egală cu jumătate din valoarea corespunzătoare energiei "centrale" a nivelului (fig. 43). Densitatea elementară de populație în interiorul unui nivel energetic este dată de relația:

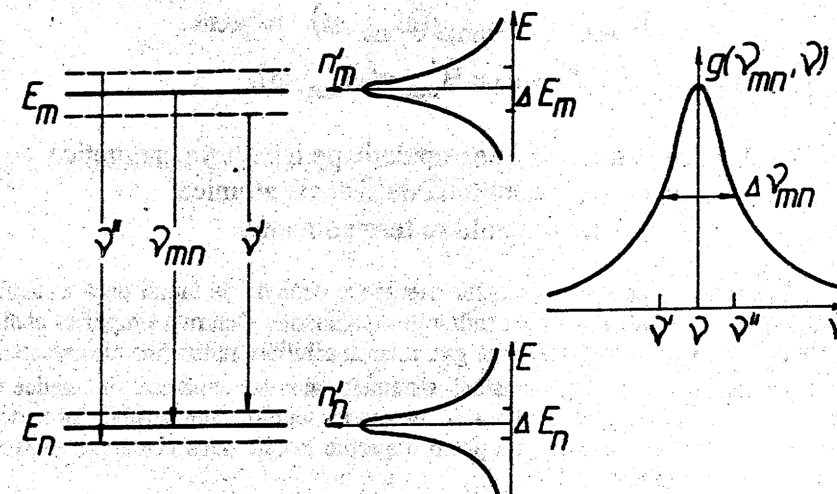


Fig. 43

$$dn_m(E) = n_{m_v}\, g(E_m, E)dE, \qquad (5.1)$$

unde $g(E_m, E)$ reprezintă funcția Lorentz normată, deoarece:

$$\int_0^{+\infty} n_m(E)dE = n_{m_v} = n_{m_v}\int_0^{+\infty} g(E_m, E)dE.$$

In aceste condiţii să analizăm procesul de emisie spontană, precum şi procesele forţate. Dacă se consideră lăţimea energetică a nivelelor, sistemele atomice vor efectua tranziţii spontane de pe domeniul energetic al nivelului superior pe cel al nivelului inferior. Probabilitatea maximă corespunde tranziţiei între valorile energetice centrale ale celor două niveluri. Dacă se consideră relaţiile (2.1), (3.6) şi (5.1) numărul de sisteme atomice dezexcitate prin emisie spontană (sau numărul de fotoni corespunzători) în intervalul de timp dt, va fi dată de relaţia:

$$dn_{mn}(\omega) = A_{mn} n_{m_v}\, g(\omega_{mn}, \omega)d\omega dt = a_{mn}(\omega)d\omega dt$$

(5.2) $$a_{mn}(\omega) = A_{mn}\, g(\omega_{mn}, \omega),$$

reprezintă coeficientul diferenţial al emisiei spontane dependent de frecvenţă, A_{mn} - coeficientul integral al emisiei spontane extins la domeniul de frecvenţe descris de funcţia de distribuţie spectrală $g(\omega_{mn}, \omega)$, care în cazul considerat, este de tip Lorentz. In mod analog se stabileşte dependenţa de frecvenţă a coeficienţilor diferenţiali pentru fenomenele forţate:

(5.3) $$b_{mn}^{st}(\omega) = B_{mn}\, g(\omega_{mn}, \omega) \quad \text{respectiv,}$$

(5.4) $$b_{nm}^{ab}(\omega) = B_{nm}\, g(\omega_{mn}, \omega).$$

6. Distribuţia densităţii de populaţie pe nivelurile energetice în cazul ansamblului de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic.

Densitatea populaţiei nivelurilor energetice depinde de faptul dacă ansamblul de sisteme atomice se află sau nu în echilibru termodinamic. Pentru a simplifica analiza, se consideră un ansamblu sub formă de gaz, aflat în echilibru termodinamic caracterizat prin temperatura T. Distribuţia densităţii sistemelor atomice după energii cinetice este descrisă de legea de distribuţie Maxwell. In aceste condiţii sunt posibile procese de ciocniri între sistemele atomice, care pot fi împărţite în cele două categorii, *elastice* şi *neelastice*, descrise în prg. III 2.1.

Ciocnirile neelastice, având ca rezultat modificarea energiei interne a sistemelor atomice, determină distribuţia acestora pe nivelurile energetice. Ansamblul fiind în echilibru termodinamic, sistemele atomice vor prezenta diferite energii cinetice de translaţie, conform legii de distribuţie Maxwell. La temperaturi mai ridicate, numărul de sisteme atomice cu energie cinetică mare va fi mai mare faţă de cazul temperaturilor scăzute. In aceste condiţii devin posibile ciocnirile neelastice de speţa întâi care conduc la popularea cu sisteme atomice a nivelurilor energetice superioare.

Sistemul atomic aflat pe un nivel excitat are două căi de evoluţie ulterioară.

- Deoarece sistemele atomice ale ansamblului sunt identice, există posibilitatea unei ciocniri neelastice de speţa a doua între sistemul excitat şi unul aflat pe un nivel inferior cu transfer al energiei interne, proces care nu modifică densitatea populaţiei stării excitate. Acest proces trebuie să se producă în intervalul timpului de existenţă al sistemului în starea excitată.

- După scurgerea timpului de viaţă, sistemul atomic trece pe un nivel energetic inferior, prin emisie spontană radiativă. Cuantele de energie obţinute reprezintă câmpul *em* care poate stimula procesele forţate între cele două niveluri: absorbţie, având ca rezultat revenirea sistemului atomic în starea excitată iniţială (procesul de captură de fotoni) şi emisie stimulată, având ca rezultat intensificarea câmpului *em*. Aceste procese de interacţiune a radiaţiei proprii cu sistemele atomice devin importante numai la temperaturi ridicate.

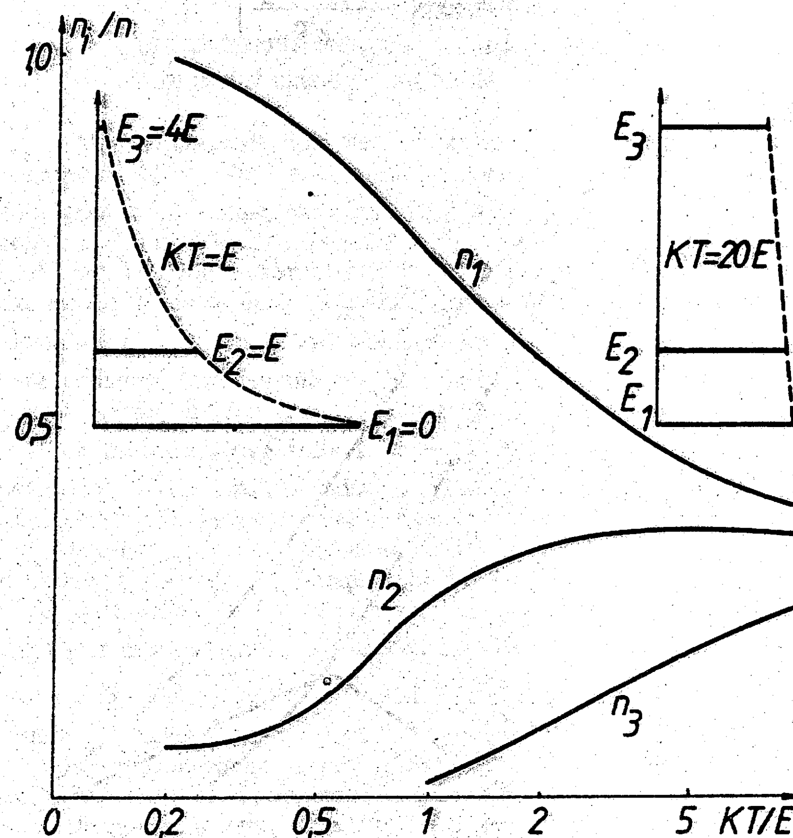


Fig. 44 a

Pe baza acestor procese prezentate fenomenologic se poate admite că într-un ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic, nivelurile excitate sunt populate cu sisteme atomice. Intre populaţiile diferitelor niveluri se stabileşte un echilibru dinamic, iar funcţia care guvernează distribuţia acestora trebuie să depindă de

temperatură şi de valoarea energiei nivelului. Funcţia de distribuţie, stabilită de către Boltzman, are expresia următoare:

$$n_m = \frac{g_m n_v \exp(-E_m/kT)}{\sum_m g_m \exp(-E_m/kT)}, \tag{6.1}$$

unde: $Z = \sum_m g_m \exp(-E_m/kT)$ reprezintă suma statistică.

Populaţia relativă a două niveluri energetice nu depinde de densitatea sistemelor atomice şi este dată de relaţia:

$$\frac{n_m}{n_n} = \frac{g_m}{g_n}\exp\left(-\frac{E_m - E_n}{kT}\right). \tag{6.2}$$

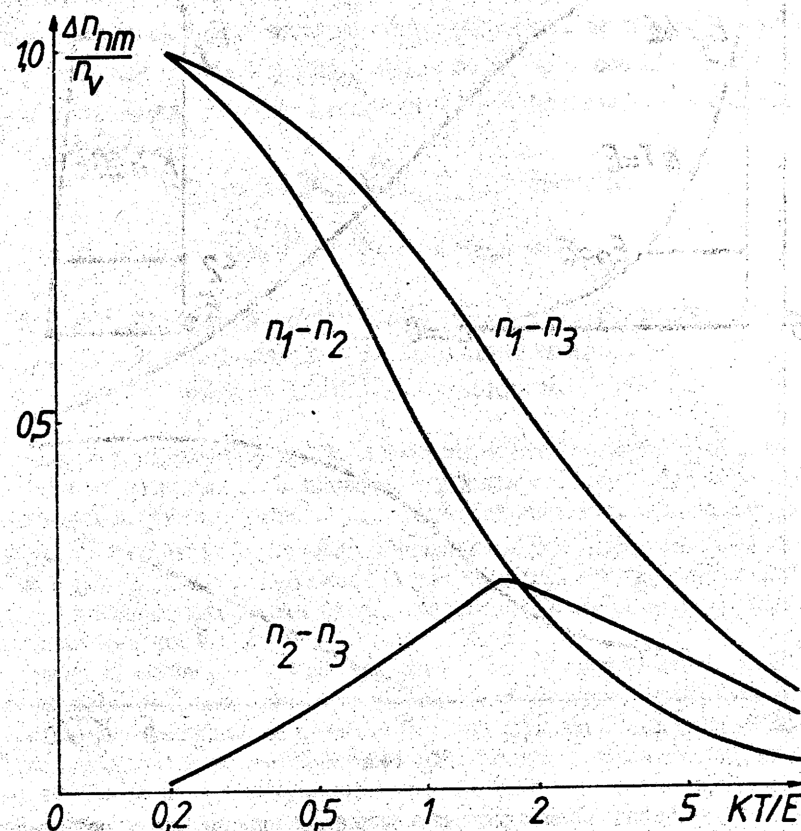


Fig. 44 b

Se obişnuieşte să se reprezinte grafic distribuţia sistemelor atomice pe nivelurile energetice într-un sistem de coordonate în care pe verticală este reprezentată energia nivelului iar pe orizontală valoarea corespunzătoare a densităţii populaţiei determinată de curba: $\exp(-E_m/kT)$. In fig. 44 a este reprezentată dependenţa densităţii populaţiei de mărimea (kT/E), unde T este mărimea variabilă, pentru trei niveluri energetice: $E_1 = 0$, $E_2 = E$ şi $E_3 = 4E$; în fig. 44 b este prezentată dependenţa diferenţei populaţiei de mărimea (kT/E). Se observă că oricare ar fi temperatura, diferenţa densităţii populaţiilor a două niveluri energetice (primul inferior şi al doilea superior) este mai mare ca zero, tinzând la zero pentru temperaturi foarte ridicate.

7. Corespondenţa dintre modelul clasic de dipol electric şi cel cuantic.

Modelul clasic de dipol electric oscilant a fost caracterizat prin momentul de dipol electric $(\mathbf{p} = -e\mathbf{r})$ şi o valoare a energiei interne proprii sistemului, care, datorită unor cauze externe, poate fi mărită în mod continuu (creşterii energiei interne îi corespunde o modificare a momentului de dipol) faţă de valoarea corespunzătoare stării de echilibru. Modelul a cărui energie internă a fost mărită, lăsat liber, datorită unor cauze interne, revine la starea de echilibru, executând o mişcare oscilatorie amortizată caracterizată prin frecvenţa ν_0. Conform electrodinamicii clasice, variaţia energiei interne a sistemului este regăsită sub forma energiei câmpului *em* radiat de către acesta. Mărimea energiei fiind finită, unda *em* este amortizată, caracterizată prin coeficientul de amortizare radiativă (γ_0), căruia îi corespunde timpul de relaxare radiativ (T_1). Analiza spectrală a semnalului radiat de către dipol, evidenţiază faptul că acesta este constituit dintr-o armonică de bază şi o succesiune continuă de armonici (necorelate între ele în ceea ce priveşte faza relativă) cu frecvenţe diferite a căror amplitudini tind foarte repede la zero odată cu variaţia frecvenţei lor faţă de frecvenţa de bază. Conturul spectral al semnalului a fost caracterizat prin lăţimea spectrală radiativă (naturală) $(\Delta\nu_0)$. Prin urmare modelul este capabil să emită câmp *em* sau să interacţioneze cu acesta într-un singur domeniu spectral foarte îngust centrat pe frecvenţa ν_0, determinată de caracteristicele acestuia.

In realitate, conform postulatelor lui Bohr şi materialului experimental acumulat, sistemul atomic poate radia câmp *em* sau interacţiona cu acesta pe un număr mare de frecvenţe, teoretic infinit de mare. Pentru a modela această realitate se introduce modelul de oscilator cuantic. Energia internă a acestuia nu poate varia în mod continuu, ci numai în salturi. Corespunzător, amplitudinea oscilaţiilor momentului de dipol electric, la trecerea modelului cuantic dintr-o stare energetică în alta, variază în salturi.

Problema radiaţiei oscilatorului cuantic este rezolvată pe baza conceptelor ce stau la baza mecanicii cuantice şi se obţin rezultate, care, la limită, conform principiului

corespondenței, trebuie să coincidă cu cele clasice. In acest scop modelul clasic de dipol electric oscilant se atașează unei tranziții cuantice a sistemului atomic, de ex. tranziției între nivelurile energetice E_m și E_n ($E_m > E_n$); frecvența de rezonanță clasică a oscilatorului (ν_0) trebuie să corespundă frecvenței tranziției $m \leftrightarrow n$:

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

Trebuie subliniat faptul că modelului îi corespunde un singur electron, iar atașând unei tranziții $m \leftrightarrow n$ un dipol de tip Lorentz, acesteia i se atașează un sistem cu un singur grad de libertate. Dacă considerăm un ansamblu de sisteme atomice, atunci unui nivel excitat, populat inițial cu n_{0m} sisteme care pot efectua tranziția $m \leftrightarrow n$, i se atașează n_{0m} dipoli oscilanți. Din punct de vedere clasic, creșterea inițială a energiei interne a ansamblului $(n_{0m}U_0)$ se micșorează în mod continuu prin emisie radiativă, astfel încât după un interval de timp t, aceasta devine:

(7.1) $$n_{0m}U(t) = n_{0m}U_0 e^{-\gamma_0 t}.$$

Din punct de vedere cuantic, pierderea de energie a ansamblului de sisteme atomice n_{0m} ce populează nivelul E_m, în intervalul de timp t, se realizează conform relației:

(7.2) $$n_m(t)h\nu_{mn} = n_{0m}\, h\nu_{mn}e^{-A_0 t}.$$

Dacă se consideră un singur dipol de tip Lorentz, deosebirea dintre modelul clasic și cel cuantic atașat tranziției constă în faptul că în timp ce oscilatorul clasic, a cărui energie internă a fost mărită de ex. cu $\Delta E = h\nu$, o pierde în mod continuu, fiind caracterizat prin constanta de relaxare (γ_0), din punct de vedere cuantic acesta pierde întreaga cantitate de energie în mod instantaneu.

Relațiile (7.1) și (7.2) vor descrie în mod identic variația energiei interne a ansamblului dacă: $A_0 = \gamma_0$ și $U_0 = h\nu_{mn}$, unde A_0 reprezintă valoarea probabilității cuantice a proceselor corespunzătoare valorii constantei clasice de amortizare. Respectiv, timpului de relaxare T_1 al dipolului clasic îi va corespunde timpul mediu de viață al tranziției (τ_{mn}), iar lățimii spectrale radiative a semnalului ($\Delta\nu_0$) îi va corespunde lățimea spectrală naturală a tranziției ($\Delta\nu_{mn}$).

Valoarea probabilității reale A_{mn} a tranziției $n \leftrightarrow m$, diferă de cea clasică A_0, deoarece depinde atât de caracteristicile modelului clasic considerat cât și de proprietățile stărilor cuantice între care are loc tranziția. Pentru a considera acest fapt, fără a face apel la metodele mecanicii cuantice, se introduce noțiunea de *tărie a oscilatorului* (f_{mn}) corespunzătoare unei tranziții, prin raportul:

(7.3) $$f_{mn} = \frac{A_{mn}}{A_0},$$

mărimea A_0 devenind unitate naturală de măsură față de care se exprimă probabilitatea reală a procesului. Există totdeauna relația $A_{mn} \leq A_0$, semnul "egal" se referă la cazul tranziției total permise.

Dacă considerăm sistemul atomic caracterizat prin energia internă corespunzătoare unei stări n, acesta are posibilitatea efectării de tranziții spre stări inferioare, superioare și în domeniul superior limitei de ionizare caracterizat prin distribuția continuă a stărilor după energie. Tranzițiile spre stări inferioare sunt caracterizate prin valori negative ale tăriei oscilatorului.

Se poate demonstra că suma tăriilor oscilatorilor corespunzători tranzițiilor de pe nivelul E_n pe toate celelalte niveluri posibile trebuie să fie egală cu unitatea:

(7.4) $$\sum_k f_{nm} = 1,$$

relație verificată de datele experimentale. Dacă starea inițială a tranziției este cea fundamentală, relația (7.4), folosind (7.3), devine:

(7.5) $$A_0 \sum_k f_{ik} = \sum_k A_{1k} = A_0.$$

Conform acestei relații, dacă modelul Lorentz este atașat atomului, atunci mărimile f_{mn} indică fracția din probabilitatea A_0 care corespunde tranziției $n \Leftrightarrow m$.

8. Mecanisme de modificare a lățimii nivelurilor energetice și a lățimii spectrale a tranziției; lățirea determinată de ciocnirile sistemelor atomice ale ansamblului.

In prg. III 2 a fost analizat mecanismul de modificare a lățimii funcției spectrale de distribuție a radiației emise de către ansamblul de dipoli supuși ciocnirilor, respectiv lățirea domeniului spectral de interacțiune al ansamblului cu un câmp *em* armonic.

In acest paragraf este analizat același efect, însă considerând procesul de ciocnire al sistemelor cuantice. Dacă de sistemul cuantic A, caracterizat prin nivelurile energetice E_n și E_m, se apropie de un alt sistem, atunci, datorită interacțiunii dintre sisteme, se modifică valoarea energiei nivelelor energetice ale sistemului A. Modificarea depinde de configurația electronică a celor două sisteme, precum și de distanța $r(A,B)$ dintre centrele de masă ale acestora. Variația energiei este diferită pentru niveluri energetice diferite, fiind pozitivă dacă interacțiunea este "de repulsie" și negativă dacă este "de atracție". Pentru un nivel energetic dat, reprezentarea energiei acestuia funcție de distanța r dintre sisteme reprezintă *curba potențială* - $E(r)$ (fig. 45).

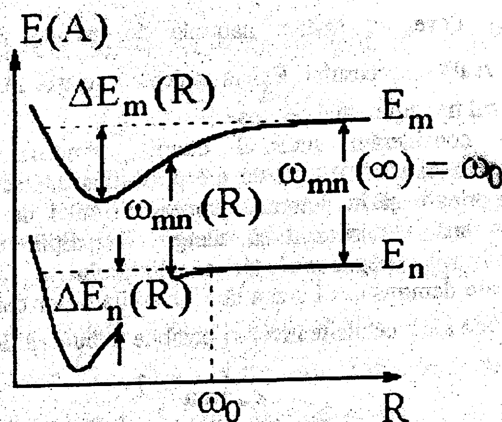


Fig. 45

Interacţiunea reciprocă a celor două sisteme cuantice la distanţe $r\langle R_c$, unde mărimea $2R_c$ reprezintă *diametrul de ciocnire*, este cunoscută sub denumirea de *ciocnire*. Dacă în timpul procesului de ciocnire partenerii nu transferă între ei energie internă prin tranziţii neradiative, atunci ciocnirea este de tip *elastic*. Schimbul de energie cinetică se realizează astfel încât suma energiilor cinetice de translaţie a celor doi parteneri înainte şi după ciocnire este egală. Procesul nu afectează valoarea momentană a energiei interne a sistemului atomic asociată "mişcărilor interne", însă perturbă faza acestei mişcări. După un *interval de timp de ciocnire* $\left(\tau_c \cong \dfrac{R_c}{v}\right)$, dacă nu acţionează mecanisme suplimentare de recombinare, cele două sisteme cuantice se separă.

Dacă în intervalul timpului de ciocnire sistemul cuantic A efectuează tranziţia radiativă $E_m \leftrightarrow E_n$, atunci frecvenţa radiaţiei emise sau absorbite depinde de distanţa $r(t)$ dintre parteneri la momentul considerat (gradul de suprapunere al funcţiilor de undă ale stărilor cuantice implicate în tranziţie):

(8.1) $$\omega_{mn}(t) = \frac{|E_m(r) - E_n(r)|}{\hbar}$$

Deoarece tranziţia radiativă are loc într-un interval de timp mult mai mic decât intervalul timpului de ciocnire, se poate accepta că distanţa r dintre parteneri nu se modifică în timpul tranziţiei; de aceea în diagrama din fig. 45 se poate considera că tranziţia are loc pe "verticală".

In fig. 46 a este prezentată traiectoria clasică a sistemului cuantic B atunci când acesta se deplasează în apropierea sistemului A, în fig. 46 b este prezentată variaţia frecvenţei de oscilaţie a sistemului A în timpul procesului de ciocnire (în intervalul de timp de ciocnire τ_c se modifică frecvenţa tranziţiei), iar fig. 46 c ilustrează variaţia fazei de oscilaţie în acest interval de timp.

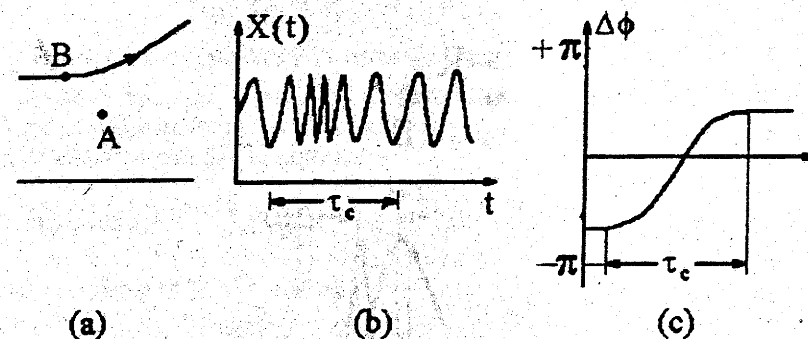


Fig. 46 a,b,c

Intr-un sistem gazos constituit din sistemele cuantice A şi B, distanţa $r(A,B)$ prezintă fluctuaţii aleatoare în jurul valorii medii r_m, care depind de presiune şi temperatură. Frecvenţa radiaţiei de fluorescenţă corespunzătoare tranziţiei $E_m \leftrightarrow E_n$ va prezenta o distribuţie aleatoare în jurul valorii cele mai probabile $\omega_{mn}(r_m)$, deplasată faţă de frecvenţa $\omega_{0\,mn}$ a sistemului A neperturbat. Variaţia $\Delta\omega = \omega_{0\,mn} - \omega_{mn}$ este determinată de variaţiile individuale ale nivelurilor E_n şi E_m, corespunzătoare distanţei $r_m(A,B)$ pentru care probabilitatea de emisie prezintă un maxim (fig. 47).

Deplasării în frecvenţă a tranziţiei spectrale determinată de ciocnirile elastice $(\Delta E = \hbar\Delta\omega = \hbar\omega_0 - \hbar\omega)$ îi corespunde o variaţie a energiei care provine din energia cinetică a partenerilor de ciocnire. Dacă deplasarea este pozitivă $(\Delta\omega\rangle 0)$ atunci, ca rezultat al ciocnirii, energia cinetică se micşorează.

De ex. dacă *a* reprezintă distanţa dintre sistemele atomice (neon) pentru care interacţiunea devine apreciabilă ($a \cong 10^{-10}$ m), iar $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$ reprezintă viteza medie termică ($\overline{v} \cong 500$m, pentru $T = 300$K şi $m_{r_{Ne}} = 20$), se obţine:

$\Delta\tau_c \cong \frac{a}{\bar{v}} \cong 10^{-13}$ s. Pentru frecvenţa $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Hz, în acest interval de timp, câmpul *em* efectuează câteva zeci de oscilaţii complete. Prin urmare, în acest interval de timp frecvenţa tranziţiei se modifică în mod aleator ceea ce influenţează lăţirea tranziţiei spectrale.

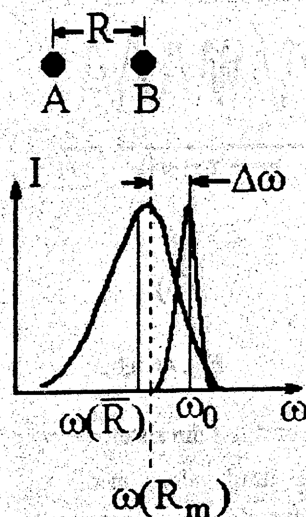


Fig. 47

Conturul intensităţii radiaţiei emise, lărgit şi deplasat datorită ciocnirilor, este de forma:

(8.2) $$I(\omega) \propto \int A_{nm}(r) P_{cioc.}(r)[E_m(r) - E_n(r)] d r,$$

unde: $A_{mn}(r)$ - probabilitatea emisiei spontane (depinde de distanţa r deoarece funcţia de undă electronică a perechii A,B depinde de r), iar $P_{cioc.}(r)$ reprezintă probabilitatea, calculată pentru unitatea de timp, ca valoarea distanţei dintre sisteme să se afle în intervalul $r \div r + dr$. Relaţia (8.2) evidenţiază faptul că profilul intensităţii liniei lărgite prin ciocniri conţine informaţii numai despre diferenţa curbelor de potenţial:

(8.3) $$E_m(r) - E_n(r) = V[A(E_m), B] - V[A(E_n), B] = \hbar\omega_{mn}(r).$$

Dacă $V(r)$ reprezintă potenţialul de interacţiune dintre sistemul cuantic A aflat în starea fundamentală şi partenerul de ciocnire (sistemul cuantic B), atunci probabilitatea ca, la echilibru termodinamic, sistemul B să fie dispus în intervalul

$r \div r + dr$ este proporţională cu factorul Boltzman $\left[\exp\left(-\frac{V(r)}{kT}\right)\right]$ şi cu factorul $4\pi r^2 dr$, iar numărul de sisteme este:

$$n(r) d r = n_0 4\pi r^2 e^{-\frac{V(r)}{kT}} d r,$$

unde n_0 reprezintă densitatea medie a sistemelor cuantice B.

Deoarece intensitatea unei linii de absorbţie este proporţională cu densitatea sistemelor absorbante în timp ce ele formează *perechile de ciocnire*, conturul intensităţii unei linii de absorbţie este dat de expresia:

(8.4) $$I(\omega) d\omega = C^* \left\{ r^2 \exp\left[-\frac{V_m(r)}{kT}\right]\right\} \frac{d}{dr}[V_m(r) - V_n(r)] d r,$$

unde, conform relaţiei (8.3), s-a considerat:

$$\frac{\hbar d\omega(r)}{dr} = \frac{d[V_m(r) - V_n(r)]}{dr}.$$

Din relaţia (8.4) se obţine: $\frac{dI(\omega, T)}{dT} = \frac{V_m(r)}{kT^2} I(\omega, T)$, adică dacă se înregistrează conturul liniei de absorbţie funcţie de temperatură se pot afla informaţii despre funcţia de potenţial a stării fundamentale. De multe ori, drept funcţie de potenţial se consideră *modelul sferic de potenţial* de tip *Lennard-Jones*:

$$V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6},$$

unde coeficienţii a şi b se aleg astfel încât să se realizeze corespondenţa dintre teorie şi măsurătorile experimentale.

Alături de ciocnirile elastice se produc şi *ciocniri neelastice* în care energia de excitare E_m a sistemului cuantic A, dacă sunt îndeplinite anumite condiţii cuantice caracteristice sistemului, este transferată, parţial sau total, în energie internă a partenerului de ciocnire B sau în energie de translaţie a ambilor parteneri.

Ciocnirile neelastice se divid în două categorii: *ciocniri neelastice* de *speţa întâi* şi *de speţa a doua*. În primul caz energia cinetică a mişcării relative a partenerilor se transferă în energie internă, partenerii sau unul dintre ei regăsindu-se într-o stare energetică superioară excitată. În al doilea caz, unul dintre parteneri se găseşte într-o stare energetică excitată şi prin cicnire neelastică trece într-o stare energetică inferioară, diferenţa de energie regăsindu-se sub formă de energie cinetică relativă.

În cazul ciocnirilor neelastice este posibil şi transferul energiei de excitare, parţial sau total, de la un sistem la altul. Dacă transferul este parţial, o fracţiune din energia internă trece în energie cinetică. Procesul prezintă probabilitate maximă dacă

transferul este integral, adică la rezonanţă. Efectul este cunoscut sub denumirea de *transfer rezonant de energie* sau *efect Penning*.

Ciocnirile neelastice sunt *procese neradiative*. După cum s-a stabilt în prg. IV 4, acest tip de ciocnire determină creşterea ratei de amortizare a energiei ($\gamma_{m0}+\gamma_m^{nerad}$), respectiv creşterea lăţimii energetice a nivelului. Ele sunt cunoscute şi sub denumirea de *ciocniri de stingere*, deoarece conduc la micşorarea numărului de sisteme cuantice ce populează nivelul E_m, ceea ce determină micşorarea intensităţii radiaţiei de fluorescenţă.

Pe de altă parte, atât ciocnirile elastice cât şi cele neelastice perturbă "mişcarea internă" a sistemului atomic în aşa fel încât faza mişcării după ciocnire faţă de faza anterioară ciocnirii, ia cu egală probabilitate orice valoare între $(0\div\pi)\text{rad}$ (fig. 46 c). Aceasta este echivalent cu "fragmentarea" procesului de emisie, ceea ce, din punct de vede cuantic, corespunde micşorării timpului de viaţă al sistemului atomic în starea energetică considerată.

Probabilitatea relaxării totale A_m a nivelului energetic m este dată de suma probabilităţilor radiative şi neradiative:

(8.5) $$A_m=A_m^{rad}+A_m^{nerad}=\frac{1}{\tau_{spontan}}+ap_B,\ a=2\sigma_{mn}\sqrt{\frac{2}{\pi\mu kT}},$$

unde: $A_m^{nerad}=n_B\,\sigma_m\,v,\ v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}},\ \mu=\frac{M_{AB}}{M_A+M_B},\ p=n_BkT.$

Corespunzător lăţirea spectrală este:

(8.5') $$\delta\omega=\delta\omega_0+\delta\omega_{cioc}=\gamma_0+ap_B,$$

de aceea suplimentul este cunoscut şi sub denumirea de *lărgire determinată de presiune*. La lărgirea determinată de presiune contribuie atât ciocnirile neelestice cât şi cele elastice. Timpul mediu de viaţă al sistemelor atomice determinat de procesele de relaxare prin ciocniri neelastice, conform relaţiei (III 2.1), exprimat funcţie de secţiunea eficace transversală a procesului este dat de relaţia:

$$T_2=\frac{1}{n_v\langle\sigma_c v\rangle}=\frac{1}{n_v k_c},$$

unde: n_v - densitatea sistemelor atomice, v - viteza relativă a sistemelor supuse ciocnirilor (de obicei, viteza termică), k_c - constanta de ciocnire caracteristică stării energetice a sistemului cuantic, iar medierea este extinsă asupra vitezelor.

In prg. IV 4 s-a stabilit că într-un ansamblu de dipoli electrici (sisteme atomice) de aceeaşi specie sau de specii diferite contribuţia la lărgirea totală a tranziţiei a lărgirii prin ciocniri este proporţională cu densitatea (presiunea) speciei considerate. Experimental s-a stabilit că lărgirea determinată de ciocniri poate fi descrisă de o relaţie de forma (8.5'):

$$\Delta\omega=A+Bp,$$

unde A şi B sunt mărimi constante care depind de constituenţii ansamblului precum şi de tranziţia considerată. Factorul B poate fi diferit pentru diferite tranziţii ale aceleuaşi sistem cuantic. Relaţia este cunoscută sub denumirea de *ecuaţia lui Stern-Vollmer*.

Calcule teoretice, confirmate de rezultate experimentale, au arătat că apare o modificare a conturului Lorentz (colizional) dependentă de frecvenţă. Lăţimea spectrală, dependentă de frecvenţă, poate fi exprimată prin relaţia:

$$\Delta\omega=\Delta\omega_{0c}-C(\omega-\omega_0),$$

unde $\Delta\omega_{0c}$ reprezintă lăţimea colizională la care se adaugă un termen dependent de frecvenţă. Modificarea conturului spectral faţă de conturul Lorentz se manifestă în "aripile" conturului (la distanţă de mai multe lăţimi spectrale faţă de frecvenţa centrală).

Lăţirea naturală (radiativă) şi cea de ciocniri (neradiativă) a nivelului energetic este determinată de aceeaşi cauză (timpul de viaţă finit în starea energetică), deci caracteristicile celor două procese aleatoare vor fi aceleaşi. Ca rezultat conturul spectral al tranziţiei, a cărui lăţire este determinat de aceste procese, va fi descris de aceeaşi funcţie de tip Lorentz (8.12'). Lăţimea energetică a tranziţiei va fi determinată de efectul combinat al lăţirii radiative şi a celei prin ciocniri:

(8.5' a) $$\Delta\omega_{mn}=\gamma_m+\gamma_n+k_m+k_n.$$

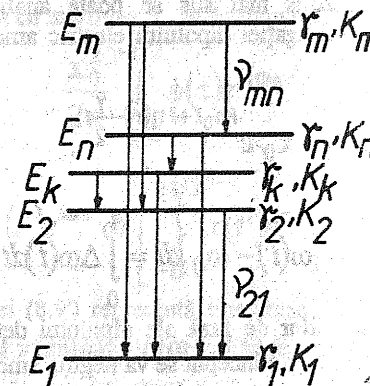


Fig. 48

In fig. 48 sunt prezentate unele tranziţii posibile între diferite niveluri energetice ale unui sistem atomic. Considerăm cazul particular al tranziţiei dintre primul nivel energetic excitat (E_2) şi cel fundamental (E_1). Nivelul excitat este caracterizat prin rata de amortizare radiativă $\gamma_2=\gamma$, iar pentru cel fundamental $\gamma_2=\gamma$.

Presupunem că ratele de ciocniri neelastice, caracteristice celor două niveluri sunt egale ($k_2 = k_1 = k = \frac{1}{T_2}$). In aceste condiţii lăţimea spectrală a tranziţiei devine:

$$\Delta\omega_{12} = \gamma + \frac{2}{T_2},$$

adică s-a regăsit rezultatul (III 2.17), obţinut din considerente clasice asupra procesului de ciocniri.

Din cele prezentate rezultă că atât ciocnirile elastice cât şi cele neelastice determină lăţirea tranziţiei spectrale, iar cele elastice determină şi deplasarea în frecvenţă a tranziţiei funcţie de curbele de potenţial $E_m(r)$ şi $E_n(r)$. Analiza cantitativă a acestui fenomen se poate realiza pe baza modelului introdus de Weisskopf şi dezvoltat de Lindholm şi Sobelman, care au modelat sistemul cuantic excitat A supus ciocnirilor sistemului B, printr-un oscilator amortizat. In acest model ciocnirile neelastice amortizează amplitudinea oscilaţiilor, prin urmare amortizarea totală este $\gamma = \gamma_0 + \gamma_{cioc}^{nerad}$. Ciocnirile elastice nu modifică amplitudinea, ci numai faza oscilatorului amortizat, determinată de deplasarea $\Delta\omega(r)$ a frecvenţei în timpul intervalului timpului de ciocnire, de aceea sunt cunoscute şi sub denumirea de *ciocniri perturbatoare ale fazei.*

Pe baza modelului descris mai sus se poate analiza cantitativ procesul ciocnirilor. Evoluţia în timp a elongaţiei dipolului electric amortizat este descrisă de relaţia:

(8.6) $$x(t) = x_0\, e^{i\omega_0 t + i\eta(t) - \frac{\gamma}{2}t},$$

Termenul:

(8.7) $$\eta(t) = \int_0^t [\omega(t) - \omega_0]dt = \int_0^t \Delta\omega(t)dt,$$

reprezintă sumarea asupra variaţiilor de fază ale dipolului determinate de ciocnirile elastice în intervalul de timp $0 \div t$. La început se va neglija amortizarea determinată de tranziţiile radiative şi ciocnirile neelastice $(\gamma = 0)$, considerând numai ciocnirile elastice. Dacă timpul de integrare este mare faţă de timpul mediu dintre două ciocniri ($T = \frac{\Lambda}{\bar{v}}$, unde: Λ - lungimea drumului liber mediu, $\bar{v}$ - viteza medie relativă a partenerilor de ciocnire) variaţia totală a fazei $\eta(t)$ reprezintă sumarea asupra variaţiilor aleatoare de fază, determinate de ciocniri caracterizate prin parametri de ciocnire diferiţi. Variaţia medie a fazei calculată pe o ciocnire, este dată de corelaţia dintre oscilaţii înainte şi după ciocnire, descrisă de funcţia (unde se consideră relaţia (8.6)):

(8.8)
$$\phi(\tau) = \frac{1}{x_0^2} e^{-i\omega_0\tau} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} x^*(t')x(t'+\tau)dt' =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} e^{i[\eta(t'+\tau) - \eta(t')]}dt'$$

care corelează fazele dipolului la momentele t şi $t+\tau$. In intervalul de timp τ, variaţiile lui $\phi(\tau)$ depind de numărul de ciocniri şi de mărimea medie a saltului de fază pe ciocnire. Relaţia (8.8) se multiplică cu $\exp(-i\omega\tau)$ şi se integrează pe intervalul: $-\tau/2 \le t' \le +\tau/2$.

(8.9)
$$x_0^2 \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \phi(\tau')e^{i(\omega_0 - \omega)\tau'}dt' =$$
$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} x^*(t')e^{i\omega t'} \left[\int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t'+\tau')e^{-i\omega(t'+\tau')}d\tau' \right] dt' \right\}$$

Integrarea după variabila τ' nu trebuie să depindă de alegerea originii timpului, deci se poate modifica originea cu mărimea τ, de la momentul $t'+\tau$ la t':

(8.9')
$$\frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \phi(\tau)e^{i(\omega_0 - \omega)\tau}d\tau =$$
$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} x^*(t')e^{i\omega t'}dt' \left[\int_{-t/2}^{+t/2} x(t')e^{-i\omega t'}dt' \right] \right\} = TF(xx^*) = I(\omega)$$

Partea dreaptă a relaţiei (8.9') reprezintă transformata Fourier a pătratului elongaţiei, deci reprezintă conturul intensităţii $I(\omega)$ al liniei spectrale. Dacă se cunoaşte funcţia de corelaţie $\phi(\tau)$, pe baza acestei relaţii se poate stabili conturul spectral determinat de ciocnirile elastice.

Funcţia de corelaţie se poate stabili dacă se consideră funcţia (8.8) sub forma:

$$\phi(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} e^{i\Delta\eta}dt' = \left\langle e^{i\Delta\eta(\tau)} \right\rangle.$$

Variaţia fazei în intervalul de timp $d\tau$ este:

$$d\phi(\tau)=\phi(\tau+d\tau)-\phi(\tau)=$$

(8.10) $$=\left\langle e^{i\Delta\eta(\tau+\Delta\tau)}\right\rangle-\left\langle e^{i\Delta\eta(\tau)}\right\rangle=\left\langle e^{i\Delta\eta(\tau)}\right\rangle\left\langle e^{i\varepsilon}-1\right\rangle,$$

unde $\varepsilon=\Delta\eta\Delta\tau$ reprezintă deplasarea suplimentară a fazei în intervalul de timp $d\tau$. Deoarece saltul de fază determinat de ciocniri nu depinde de valoarea η a fazei înainte de ciocnire, se poate înlocui medierea în timp asupra produsului prin produsul factorilor mediaţi:

(8.10') $$d\phi(\tau)=\left\langle e^{i\Delta\eta(\tau)}\right\rangle\left\langle e^{i\varepsilon}-1\right\rangle=\phi(\tau)\left\langle e^{i\varepsilon}-1\right\rangle.$$

Se poate înlocui medierea în timp prin medierea pe ansamblu, care este echivalentă cu medierea asupra tuturor ciocnirilor. Dacă se consideră un ansamblu gazos, unde n_v reprezintă numărul de particule pe unitate de volum, numărul de ciocniri caracterizate prin parametrul de ciocnire localizat în intervalul $r \div r+dr$ şi în intervalul de timp $d\tau$ este:

$$dZ=2\pi r\, dr\, n_v \bar{v}\, d\tau,$$

unde: $\bar{v}$ reprezintă viteza medie relativă. Medierea pe ansamblu conduce la:

$$\left\langle e^{i\varepsilon}-1\right\rangle=2\pi n_v\bar{v}\,d\tau\int_0^\infty\left\langle e^{i\Delta\eta(r)}-1\right\rangle r\,dr=-n_v\bar{v}\,d\tau(\sigma_b-i\sigma_s),$$ unde:

(8.11 a) $$\sigma_b=2\pi\int_0^\infty[1-\cos\eta(r)]r\,dr,$$

(8.11 b) $$\sigma_s=2\pi\int_0^\infty[\sin\eta(r)]r\,dr.$$

Integrarea relaţiei (8.10') conduce la:

$$\phi(\tau)=e^{-n_v\bar{v}\tau(\sigma_b-i\sigma_s)}.$$

Considerând relaţia (8.9'), se obţine conturul liniei spectrale:

(8.12) $$I(\omega)=\frac{I_0}{2\pi}\frac{(n_v\bar{v}\sigma_b)^2}{(\omega-\omega_0-n_v\bar{v}\sigma_s)^2+(n_v\bar{v}\sigma_b)^2},$$

unde: $$I_0=\int_0^\infty I(\omega)d\omega.$$

Această relaţie evidenţiază că în prezenţa ciocnirilor elastice conturul este de tip Lorentz cu lăţimea spectrală: $\delta\omega=2n_v\bar{v}\sigma_b$ şi deplasat faţă de centrul liniei cu $\Delta\omega=n_v\bar{v}\sigma_s$. Atât lărgimea conturului, cât şi deplasarea acestuia sunt proporţionale

cu densitatea (presiunea) partenerilor de ciocnire şi viteza lor medie relativă. De asemenea lărgirea este proporţională cu σ_b, iar deplasarea cu σ_s (fig. 49).

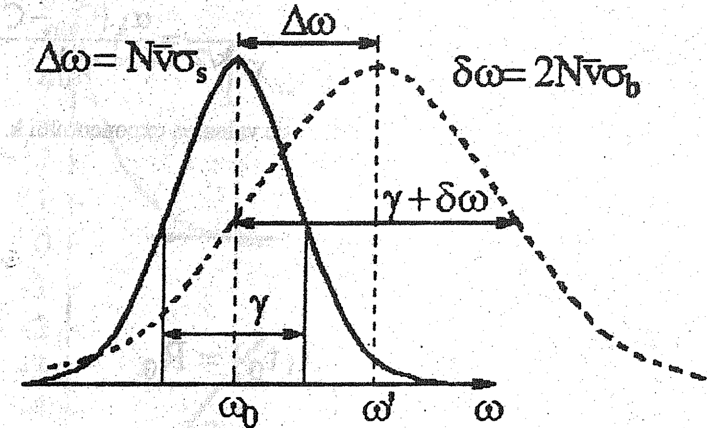


Fig. 49

Considerarea efectelor de amortizare prin emisie spontană şi ciocniri neradiative se realizează prin includerea în relaţia (8.12) a constantei totale de amortizare $\gamma=\gamma_0+\gamma_{cioc}^{nerad}$:

(8.12') $$I(\omega)=\frac{I_0}{2\pi}\frac{\left(\frac{\gamma}{2}+n_v\bar{v}\sigma_b\right)^2}{(\omega-\omega_0-n_v\bar{v}\sigma_s)^2+\left(\frac{\gamma}{2}+n_v\bar{v}\sigma_b\right)^2}.$$

Valoarea secţiunilor transversale este determinată de curbele potenţiale prin intermediul saltului de fază $\eta(r)$. Dacă curbele potenţiale caracteristice nivelurilor energetice sunt de forma:

(8.13) $$V_n(r)=\frac{C_n}{r^k} \text{ şi } V_m(r)=\frac{C_m}{r^k},$$

variaţia frecvenţei tranziţiei $E_n \leftrightarrow E_m$ este dată de relaţia:

$$\hbar\omega_{mn}(r)=\frac{C_n-C_m}{r^k}.$$

Saltul de fază determinat de o ciocnire caracterizată prin parametrul de ciocnire r_0, neglijând împrăştierea particulei B şi presupunând că parcursul lui B nu este reflectat ci urmează o linie dreaptă (fig. 50), este:

$$\eta(r_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\omega dt=\frac{1}{\hbar}\int\frac{C_m-C_n}{\left[r_0^2+\bar{v}^2(t-t_0)^2\right]^{k/2}}=\frac{\alpha_k(C_m-C_n)}{\bar{v}r_0^{k-1}}, \quad (8.14)$$

unde: α_k este o constantă numerică care depinde de valoarea exponentului k.

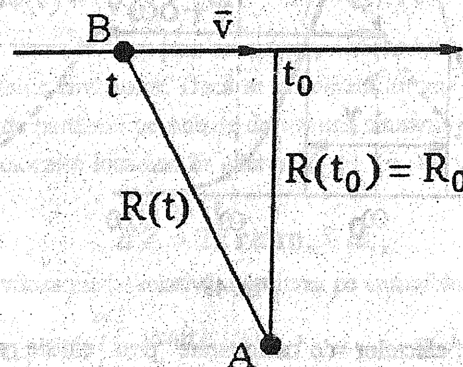


Fig. 50

Variaţia fazei poate fi pozitivă $(C_n > C_m)$ sau negativă, funcţie de orientarea reciprocă a momentului cinetic şi a celui de spin. In fig. 51 este prezentată variaţia fazei corespunzătoare tranziţiei $3s \rightarrow 3p$ a atomului de Na supus ciocnirilor cu atomul de H, corespunzătoare la diferite stări moleculare adiabatice ale sistemului Na^*H, pentru un domeniu larg de variaţie a parametrului de impact.

Dacă relaţia (8.14) se introduce în relaţiile (8.11 a,b) se poate calcula valoarea secţiunilor transversale σ_s şi σ_b. De ex. în cazul $k=4$ contribuţia principală la mărimea σ_b provine de la ciocnirile caracterizate prin valori mici ale parametrilor de impact, în timp ce pentru σ_s contribuţia principală revine ciocnirilor caracterizate prin valori mari ale parametrilor de impact. Prin urmare ciocnirile elastice la distanţe mari nu determină lărgiri apreciabile ale tranziţiei, însă determină deplasări mari ale centrului liniei.

Dacă potenţialele de interacţiune sunt nemonotone, de ex. potenţialul Lennard-Jones, în "aripile" conturului lărgit apar benzi "sateliţi". Din structura acestora se pot obţine informaţii relativ la potenţialul de interacţiune.

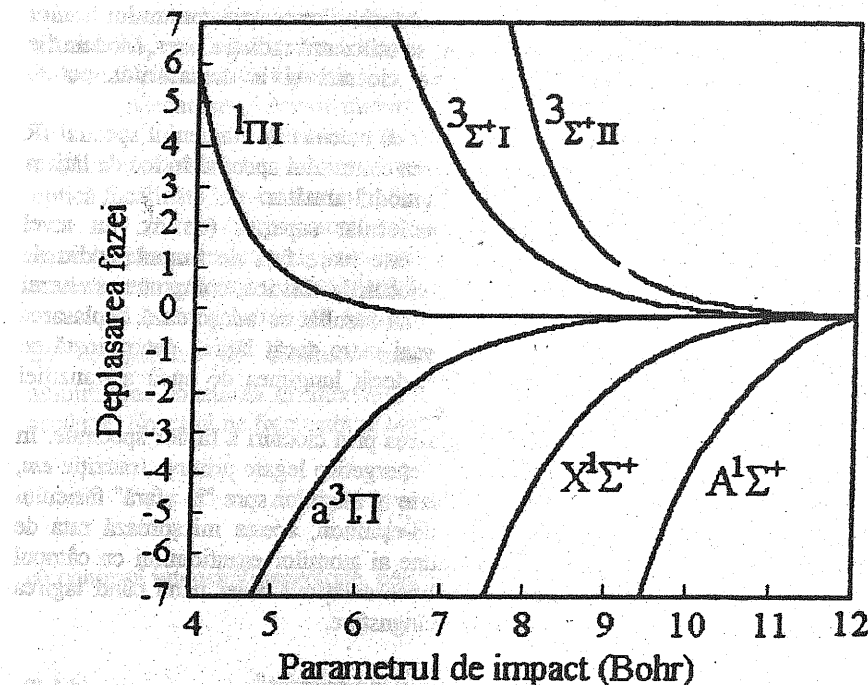


Fig. 51

Dacă relaţia (8.14) se introduce în relaţiile (8.11 a,b) se poate calcula valoarea secţiunilor transversale σ_s şi σ_b. De ex. în cazul $k=4$ contribuţia principală la mărimea σ_b provine de la ciocnirile caracterizate prin valori mici ale parametrilor de impact, în timp ce pentru σ_s contribuţia principală revine ciocnirilor caracterizate prin valori mari ale parametrilor de impact. Prin urmare ciocnirile elastice la distanţe mari nu determină lărgiri apreciabile ale tranziţiei, însă determină deplasări mari ale centrului liniei.

Dacă potenţialele de interacţiune sunt nemonotone, de ex. potenţialul Lennard-Jones, în "aripile" conturului lărgit apar benzi "sateliţi". Din structura acestora se pot obţine informaţii relativ la potenţialul de interacţiune.

In plasme şi în descărcări în gaze, din cauza interacţiunilor de tip Coulomb la distanţe mari ale particulelor încărcate electric (electroni şi ioni), descrise de potenţialul (8.13), unde $k=1$, deplasarea în frecvenţă şi lărgirea prin presiune sunt relativ mari. Acestea prezintă interes în laserii cu descărcări în gaze (laserul cu He-Ne sau cu argon ionizat). Interacţiunea dintre particulele încărcate poate fi descrisă prin efectul Stark liniar sau pătratic. Efectul Stark liniar determină numai lărgirea conturului spectral, în

timp ce efectul pătratic determină şi deplasarea acestuia. Din măsurători asupra conturului liniilor se pot determina cracteristici detaliate ale plasmei (densitatea electronică, cea ionică şi temperatura). Precizia măsurătorilor asupra conturului liniilor în plasmă poate fi mărită dacă pentru determinări se utilizează radiaţia laser. Modelurile clasice utilizate pentru explicarea lărgirii prin ciocniri şi a deplasărilor pot fi îmbunătăţite folosind calcule cuantice.

Ingustarea conturului spectral determinat de ciocniri. In domeniul spectral IR şi de microunde, ciocnirile pot determina îngustarea conturului spectral în loc de lăţirea acestuia (*îngustarea Dicke*). Aceasta se explică în modul următor.

Dacă timpul de viaţă al nivelului molecular superior (de ex. un nivel vibraţional excitat al stării electronice de bază) este mare faţă de timpul mediu de ciocnire, viteza oscilatorului este modificată de ciocnirile elastice, componenta vitezei medii devine mai mică decât în lipsa acestora şi ca rezultat se micşorează deplasarea Doppler. In cazul în care lăţirea Doppler este mai mare decât lăţirea determinată de ciocniri, dacă drumul liber mediu este mai mic decât lungimea de undă a tranziţiei moleculare, acestea determină o îngustare a liniei.

Există şi alt efect care determină îngustarea prin ciocniri a linilor spectrale. In cazul timpilor de viaţă foarte mari ai nivelurilor energetice legate printr-o tranziţie *em*, lăţimea liniei este determinată de timpul de difuzie al atomilor spre "în afară" fasciului laser. Dacă se introduce un gaz nobil în celula-eşantion, acesta micşorează rata de difuzie şi ca rezultat creşte timpul de interacţiune ai atomilor eşantionului cu câmpul laser, ceea ce determină o micşorare cu presiunea a lăţimii liniei până când lăgirea determinată de presiune compensează efectul de îngustare.

8.1 Lărgirea determinată de "timpul de tranzit".

Acest mecanism se manifestă în experimentele în care sistemele atomice se deplasează perpendicular pe direcţia fascicului de radiaţie optică cu care interacţionează, timpul de tranzitare a secţiunii fascicului fiind mic faţă de timpul mediu de viaţă T_1 al tranziţiei determinat de emisia spontană, respectiv faţă de timpul mediu de defazare T_2.

Durata interacţiunii coerente dintre sistemul atomic şi semnalul optic aplicat este limitată de timpul T_{tr} de tranzitare a secţiunii fascicului; ca rezultat se obţine o lăţire *prin timp de tranzit* $\Delta\omega \approx \frac{1}{T_{tr}}$. Dacă viteza termică a sistemelor atomice este de ordinul $v \cong 10^3\ m/s$, iar lungimea parcursului pe care are loc interacţiunea este de câţiva mm se obţine o lărgire de ordinul a 10^5 Hz. In cazul particular al tranziţiilor între nivelurile de roataţie-vibraţie ale moleculelor a căror timp mediu de viaţă spontan se află în domeniul milisecundelor, timpul de tranzit $T = d/v$ al moleculelor caracterizate prin viteza termică medie v prin fasciculul laser a cărui diametru este d

poate fi mai mic cu câteva ordine de mărime decât timpul de viaţă spontan al sistemului cuantic.

In asemenea cazuri, lăţimea spectrală a tranziţiei moleculare neinfluenţată de efectul Doppler nu mai este limitată de probabilitatea tranziţiilor spectrale, ci de timpul de tranzit prin fasciculul laser.

Mecanismul devine important în situaţii speciale:

- experimente de înaltă rezoluţie asupra interacţiunii dintre fascicule moleculare de sisteme atomice care se deplaseaza cu viteză mare şi fascicule de radiaţie optică focalizată într-un domeniu foarte mic.
- experimente în care se utilizează cuve cu lungime mare, conţinând gaze la presiune scăzută, caracterizate prin tranziţii cu timp de viaţă mare sau în experimente referitoare la standardele de frecvenţă laser de înaltă rezoluţie.

Lăţirea determinată de timpul de tranzit poate fi evidenţiată în modul următor. Să considerăm un oscilator neamortizat $x = x_0 \cos\omega_0 t$ care oscilează cu amplitudine constantă în intervalul de timp T şi care poate să se oprească brusc din oscilaţie. Spectrul de frecvenţă se obţine din transformata Fourier:

$$\text{(8.1 a)} \qquad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt,$$

iar conturul intensităţii spectrale, pentru $(\omega - \omega_0) \langle\langle \omega_0$ este:

$$\text{(8.1 b)} \qquad I(\omega) = A^* A = C \frac{\sin^2 \frac{\omega - \omega_0}{2} T}{(\omega - \omega_0)^2}.$$

Aceasta reprezintă o funcţie cu semilăţimea $\delta\omega_T = \frac{5,6}{T}$, respectiv cu lăţimea totală $\delta\omega_b = \frac{4\pi}{T} \cong \frac{12,6}{T}$ între punctele de zero dispuse de ambele părţi ale maximului central.

Să considerăm un atom care traversează domeniul unui fascicul laser, unde variaţia intensităţii acestuia este descrisă printr-un contur rectangular (fig. 52 a). Amplitudinea oscilatorului $x(t)$ este proporţională cu amplitudinea câmpului $e(t) = E_0(r)\cos\omega_0 t$. Dacă timpul de interacţiune $T = \frac{d}{v}$ este mic faţă de timpul de amortizare $T = \frac{1}{\gamma}$, în intervalul de timp T amplitudinea oscilaţiilor poate fi considerată constantă. In acest caz, lăţimea spectrală a liniei de absorbţie este: $\delta\omega_b = \frac{5,6v}{d} \rightarrow \delta v \cong \frac{v}{d}$.

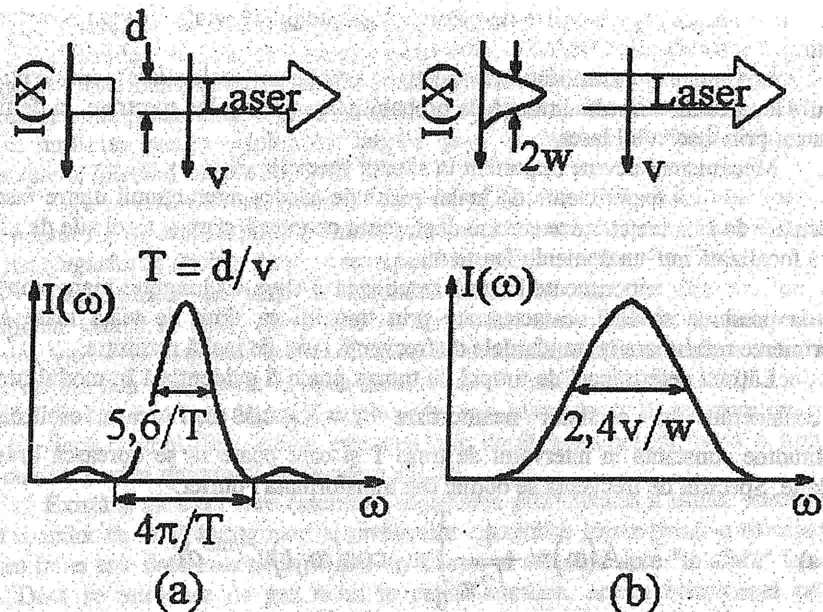


Fig. 52 a,b

In realitate distribuția câmpului în secțiunea transversală a unui fascicul laser care corespunde modului fundamental de oscilație este (fig. 52 b):

$$e = E_0 e^{-\frac{r^2}{w^2}} \cos \omega t,$$

unde $2w$ reprezintă diametrul dimensiunii spotului fasciculului gaussian (măsurat în secțiunea fasciculului, între punctele unde $e = E_0/e$). In acest caz, considerând amplitudinea oscilatorului forțat $x = \alpha E$, se obține profilul liniei gaussiene:

(8.2) $$I(\omega) = I_0 \exp\left[-(\omega - \omega_0)^2 \frac{w}{2v^2}\right],$$

care este caracterizat printr-o lățime limitată de timpul de tranzit de forma:

(8.3) $$\delta\omega_{tt} = 2\frac{v}{w}\sqrt{2\ln 2} \cong 2{,}4\frac{v}{w} \to \delta\nu \cong 0{,}4\frac{v}{w}.$$

Prin urmare lățimea determinată de timpul de tranzit poate fi micşorată fie mărind diametrul $(2w)$ al spotului fasciculului laser, fie micşorând viteza moleculară v (ambele metode au fost verificate experimental). Metoda cea mai eficientă constă în micşorarea vitezei atomilor prin "răcire optică".

Să acceptăm că frontul de undă ale câmpului radiației laser este plan, iar moleculele se deplasează paralel cu acesta. Suprafețele de fază ale unui fascicul gaussian focalizat sunt curbate, exceptând planul din focar. Conform fig. 53, unde un atom se deplasează de-a lungul direcției r, perpendicular la fasciculul laser, apare o variație spațială a fazei:

(8.4) $$\Delta\varphi = x\frac{2\pi}{\lambda}, \text{ unde } r^2 = R^2 - (R-x)^2 \to x = \frac{r^2}{2R}, \text{ (dacă } x \langle\langle R\text{)},$$

unde $k = \frac{\omega}{c}$ – mărimea vectorului de undă, iar R – raza de curbură a frontului de undă. Această variație a fazei depinde de localizarea atomului; prin urmare, este diferită pentru diferiți atomi şi conduce la lărgiri suplimentare ale tranziției spectrale. Pentru valoarea lățimii determinată de timpul de tranzit calculele au condus la o expresie care include şi curbura frontului de undă:

(8.5)

$$\delta\omega = \frac{2v}{w}\sqrt{2\ln 2}\left[1 + \left(\frac{\pi w^2}{R\lambda}\right)^2\right] \cong \delta\omega_{tt}\left[1 + \left(\frac{\pi w^2}{R\lambda}\right)^2\right] \approx \delta\omega_{tt}\sqrt{1 + \Delta\phi^2}.$$

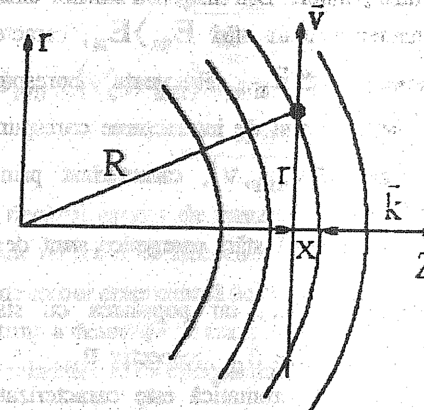


Fig.53

Pentru a micşora această lățime suplimentară, raza de curbură trebuie să prezinte valoarea cea mai mare. Dacă $\Delta\phi \langle\langle \pi$, pentru o distanță $r = w$, lărgirea determinată de curbura frontului de undă este mică față de lărgirea determinată de timpul de tranzit.

Aceasta impune razei de curbură condiția $R \rangle\rangle \frac{w^2}{\lambda}$.

Cap. VI

INTERACŢIUNEA RADIAŢIEI OPTICE CU ANSAMBLUL DE SISTEME ATOMICE

1. Propagarea radiaţiei optice prin ansamblul de sisteme atomice.

Considerăm un ansamblu de sisteme atomice identice prin care se propagă un fascicul monocromatic de raze paralele. Din mulţimea stărilor energetice caracteristice sistemului atomic dat, considerăm două stări $E_m \rangle E_n$, caracterizate prin lăţimile energetice ΔE_m, respectiv ΔE_n. Frecvenţa corespunzătoare tranziţiei $E_m \leftrightarrow E_n$ este ν_{mn}, iar domeniul de interacţiune corespunzător tranziţiei este descris prin conturul spectral $g(\nu_{mn}, \nu)$, caracterizat prin lăţimea spectrală: $\Delta\nu_{mn} = \frac{\Delta E_m + \Delta E_n}{h}$. Cele două stări energetice sunt degenerate, factorii de degenerare fiind g_m, respectiv g_n, iar popularea cu sisteme atomice este caracterizată prin densităţile de populaţie n_m, respectiv n_n.

Fasciculul de radiaţie monocromatică este caracterizat prin densitatea de energie $\rho(\nu)$ şi lăţimea domeniului spectral $\delta\nu$, centrat pe frecvenţa ν_s, unde $\delta\nu \langle\langle \Delta\nu_{mn}$. Pentru a se realiza interacţiunea câmpului de radiaţie cu sistemele atomice este necesar ca domeniul spectral centrat pe frecvenţa ν_s să fie cuprins în domeniul spectral al tranziţiei centrat pe frecvenţa ν_{mn} (fig. 54). Interacţiunea câmpului de radiaţie optică cu ansamblul de sisteme atomice prin efectele de absorbţie şi emisie stimulată, determină modificarea densităţii de populaţie a stărilor energetice. Deoarece radiaţia obţinută ca rezultat al emisiei spontane este nedirijată, contribuţia acesteia la variaţia densităţii de energie pe direcţia de propagare a fasciculului poate fi neglijată.

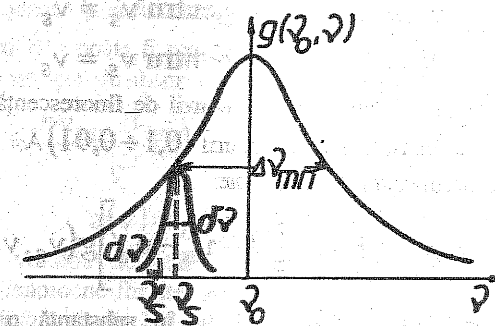


Fig. 54

Variaţia în timp a densităţii de populaţie a nivelului superior E_m ca rezultat al interacţiunii cu câmpul din domeniul $d\nu$, este dată de relaţia:

(1.1)

$$\frac{d n_m}{dt} d\nu = $$
$$= d\nu\rho(\nu'_s) B_{nm}\, g(\nu'_s, \nu_{nm}) n_m - d\nu\rho(\nu'_s) B_{mn}\, g(\nu'_s, \nu_{nm}) n_m = $$
$$= -\frac{d n_n}{dt} d\nu$$

Deoarece fiecărui proces de tranziţie a unui sistem atomic între cele două niveluri îi corespunde un foton cu frecvenţa ν_{mn}, relaţia (1.1) descrie în acelaşi timp variaţia numărului de fotoni determinată de concurenţa proceselor de absorbţie şi emisie forţată. Variaţia în timp a densităţii de energie corespunzătoare domeniului spectral $d\nu$ se obţine înmulţind relaţia (1.1) cu energia unui foton $(h\nu'_s)$:

$$\frac{d\rho(\nu'_s)}{dt} d\nu = h\nu'_s\left(-\frac{d n_m}{dt}\right) = $$

(1.2)

$$= d\nu\rho(\nu'_s) B_{nm}\left[\frac{B_{mn}}{B_{nm}} n_m - n_n\right] g(\nu'_s, \nu_{nm}) h\nu'_s$$

Pentru a determina variaţia densităţii de energie corespunzătoare domeniului spectral al semnalului iniţial trebuie să se cunoască distribuţia după frecvenţe a densităţii iniţiale de energie şi să se integreze relaţia (1.2) pe domeniul de definiţie al acesteia. In general

această dependență este greu de definit, dar în cazul sistemelor laser, deoarece $\delta\nu \langle\langle \Delta\nu_{mn}$, poate fi definită printr-o funcțională-δ (câmp armonic), unde:

$$\delta(\nu_s' - \nu_s) = 0 \quad \text{pentru } \nu_s' \neq \nu_s$$

$$\delta(\nu_s' - \nu_s) = 1 \quad \text{pentru } \nu_s' = \nu_s$$

De ex. în cazul laserului cu rubin, lățimea benzii de fluorescență este aprox. 5 Å, în timp ce lățimea semnalului laser este de ordinul $(0{,}1 \div 0{,}01)$ Å.

In aceste condiții relația (1.2) devine:

$$\frac{d\rho(\nu_s)}{dt} = \rho(\nu_s) B_{nm}\left[\frac{B_{mn}}{B_{nm}} n_m - n_n\right] g(\nu_s, \nu_{nm}) h\nu_s. \tag{1.3}$$

In intervalul de timp dt radiația străbate în substanță o distanță dx, deci: $dt = \frac{dx}{v} = \frac{n}{c}dx$, unde n reprezintă indicele de refracție al substanței considerate.

Variația densității spectrale a radiației care traversează stratul de substanță cuprins între $x \div x + dx$ este dată de relația:

$$\frac{d\rho(\nu_s)}{dx} = \rho(\nu_s) B_{nm}\left[\frac{B_{mn}}{B_{nm}} n_m - n_n\right] g(\nu_s, \nu_{nm}) \frac{n}{c}. \tag{1.4}$$

Integrând relația (1.4) pe lungimea (L) a materialului străbătută de radiație și folosind relația (IV 3.4) se obține expresia densității de radiație la ieșirea din material:

$$\rho(\nu_s, L) = \rho(\nu_s, 0)\exp\left\{h\nu_s g(\nu_s, \nu_{nm}) B_{nm}\left[\frac{g_n}{g_m} n_m - n_n\right]\frac{nL}{c}\right\}. \tag{1.5}$$

Dacă se introduce notația:

$$a(\nu_s) = \frac{h\nu_s n}{c} g(\nu_s, \nu_{nm}) B_{nm}\left[n_n - \frac{g_n}{g_m} n_m\right], \tag{1.6}$$

unde $a(\nu_s)$ reprezintă *coeficientul spectral de absorbție liniară* (*coeficient de absorbție*), atunci relația (1.6) ia forma legii de absorbție Bouguere-Lambert:

$$\rho(\nu_s, L) = \rho(\nu_s, 0) exp[-a(\nu_s) L]. \tag{1.7}$$

Mărimea $a(\nu_s L)(m^{-1})$ este numeric egală cu inversul mărimii distanței de-a lungul căreia densitatea de radiație se micșorează de e ori. Dacă conturul tranziției $g(\nu, \nu_{mn})$ nu depinde de densitatea de energie *em*, atunci pentru un mediu omogen (densitatea populației nu depinde de coordonate), mărimea $a(\nu_s L)$ poate fi considerată constantă.

Mărimea $K = \int a(\nu_s L) d\nu$, unde integrala este extinsă la conturul tranziției, este cunoscută sub denumirea de *coeficient integral de absorbție*. Deoarece conturul tranziției este normat și suficient de îngust (în interiorul lui variația mărimii ν este mică, deci mărimea $h\nu$ poate fi scoasă de sub integrală, iar celelalte mărimii sunt constante), coeficientul integral de absorbție poate fi scris sub forma:

$$K = \frac{h\nu_{nm} B_{nm} n}{c}\left[n_n - \frac{g_n}{g_m} n_m\right], \text{ deci:} \tag{1.8}$$

$$a(\nu) = g(\nu, \nu_{nm}) K.$$

Relația (1.5) arată că variația densității spectrale este determinată de contribuția simultană a celor două fenomene forțate, absorbția și emisia stimulată. Aceste procese sunt independente, iar probabilitatea lor nu depinde de popularea nivelurilor energetice. Dacă este prezent câmpul de radiație *em* cu frecvență egală cu frecvența tranziției, acestea apar dacă cele două niveluri ale tranziției sunt populate și dacă tranziția este permisă de către regulele cuantice de selecție.

Dacă $\frac{n_m}{g_m} \langle \frac{n_n}{g_n}$, coeficientul $a(\nu)$ este pozitiv, iar densitatea de energie scade cu distanța de pătrundere în substanță conform unei legi exponențiale. Absorbția măsurată la ieșirea fasciculului din substanță reprezintă o *absorbție aparentă*, deoarece o parte din radiația absorbită este compensată de cea obținută prin emisie stimulată. Dacă substanța se află în echilibru termodinamic, popularea cu sisteme atomice a nivelurilor energetice depinde numai de temperatură și este descrisă de legea de distribuție Boltzman: $n_n = n_m e^{-\frac{\Delta E_{mn}}{kT}}$. Popularea nivelului superior, indiferent de temperatură, este mai mică decât popularea celui inferior, deci se va observa atenuarea fasciculului.

Prin comunicare în mod selectiv de energie substanței este posibilă crearea unei stări de neechilibru termodinamic în care popularea nivelului energetic superior să fie mai mare decât cea a nivelului inferior: $\frac{n_m}{g_m} \rangle \frac{n_n}{g_n}$ Situația realizată între cele două niveluri energetice este cunoscută sub denumirea de *inversie de populație*, iar substanța în care s-a realizat această situație poartă denumirea de *mediu activ*. Energia comunicată substanței pentru a realiza o populare preferențială a unui nivel energetic față de altul poartă denumirea de *energie de pompaj*.

Mediul activ poate fi caracterizat prin *coeficientul de amplificare*: $\alpha(\nu_s) = -a(\nu_s)$. La propagarea fascicului de radiație prin mediul activ are loc creșterea densității spectrale de radiație, deci amplificarea acesteia conform relației:

$$\rho(\nu_s, L) = \rho(\nu_s, 0)\exp[\alpha(\nu_s) L]. \tag{1.9}$$

Câmpul *em* extrage de la mediul activ energia preluată de acesta de la sursa de pompaj și înmagazinată sub formă de energie internă a sistemelor atomice.

Dacă densitățile populației celor două niveluri energetice sunt egale: $\frac{n_m}{g_m}=\frac{n_n}{g_n}$, atunci, față de fasciculul considerat, substanța se comportă ca și cum ar fi transparentă. Dependența densității de energie de distanța de pătrundere în mediu, în cazurile analizate, este prezentată în fig. 55 (mărimea n_m/g_m descrie popularea unei stari a nivelului degenerat, deci relațiile prezentate mai sus se referă la densitatea de populație a stărilor energetice).

Din relația (1.8) rezultă că valoarea maximă a coeficientului de amplificare se obține dacă frecvența semnalului este egală cu frecvența corespunzătoare maximului conturului tranziției. Dacă conturul tranziției este de tip Lorentz se obține:

(1.10) $$\alpha_L(\omega_0)=-a_L(\omega_0)=-\frac{2}{\pi\Delta\omega}K=\frac{2\hbar\omega_0\, nB_{mn}}{\pi c\Delta\omega}\left(\frac{g_n}{g_m}n_m-n_n\right)$$

iar dacă este de tip Gauss:

(1.11) $$\alpha_D(\omega_0)=-\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D}K.$$

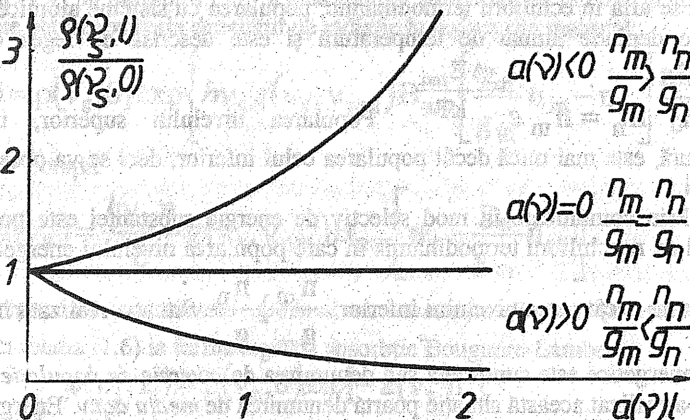


Fig. 55.

Din relația (1.11) rezultă că lățirea tranziției spectrale determină micșorarea valorii maxime a conturului spectral de absorbție (amplificare), respectiv micșorarea probabilității tranzițiilor forțate.

Să considerăm ansamblul de sisteme atomice în echilibru termodinamic, nivelul final al tranziției drept nivel fundamental, iar diferența energetică între cele două niveluri satisface condiția: $kT \ll E_m - E_n$. In acest caz majoritatea sistemelor atomice se află pe nivelul fundamental ($n_n \cong n_v, n_m \cong 0$), deci:

(1.12) $$a(\omega_{1m})=\frac{\hbar\omega_{1m}\, nB_{1m}}{c}n_v\, g(\omega_{1m}),$$

coeficientul de absorbție este proporțional cu densitatea de sisteme atomice absorbante. Dacă conturul spectral al tranziției $1 \Leftrightarrow m$ este de tip Lorentz, atunci expresia coeficientului de absorbție este de forma:

(1.13) $$a_L(\omega_{1m})=\frac{\hbar\omega_{1m}\, n_v B_{1m}}{c/n}\frac{2}{\pi\Delta\omega}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_{1m}}{\Delta\omega/2}\right)^2}.$$

Dacă se compară relația (1.13) cu (III 2.12) se poate identifica expresia coeficientului Einstein (B_{mn}) pentru fenomene forțate:

(1.14) $$B_{mn}=\frac{\pi e^2}{4\hbar\varepsilon_0\, m_e\, \omega_{mn}}.$$

Deoarece conturul spectral este normat coeficientul integral de absorbție este dat de relația:

(1.15) $$K_{1m}=\frac{\hbar\omega_{1m}}{c/n}n_v B_{1m},$$

adică este proporțional cu coeficientul Einstein pentru absorbție. Pe baza relației (1.15), determinând experimental valoarea coeficientului integral de absorbție se poate calcula valoarea mărimii B_{1m}, iar pe baza relației (V 3.6) se poate calcula valoarea mărimii A_{1m}.

1.1 Secțiunea transversală de absorbție; tăria oscilatorului.

Pe baza relației (1.12) se poate introduce mărimea fizică: $\sigma(\omega)=\frac{a(\omega)}{n_v}$ care caracterizează capacitatea fiecărui sistem atomic de a absorbi radiația *em* cu frecvența ν. Deoarece are dimensiunile unei arii, mărimea se numește *secțiune transversală de absorbție* (*secțiune diferențială de absorbție*). Pentru o tranziție dată $m \Leftrightarrow n$, se poate scrie:

(1.16) $$\sigma_{mn}(\omega)=\frac{\hbar\omega_{mn}}{c/n}B_{mn}\,g(\omega,\omega_{mn}),$$

iar mărimea fizică denumită *secțiune integrală de absorbție* este dată de relația:

(1.17) $$\vartheta_{mn}=\int_{0}^{+\infty}\sigma_{mn}(\omega)d\omega=\frac{\hbar\omega_{mn}}{c/n}B_{mn}.$$

Din relația (III 2.12) rezultă că valoarea secțiunii transversale integrale de absorbție în cazul dipolului de tip Lorentz este:

(1.18) $$\sigma_{integr}=\frac{\pi e^2}{2\varepsilon_0 m_e c}\cong 1{,}17.10^{-5}\,m^2/s,$$

reprezentând o constantă universală. Din punct de vedere clasic secțiunea transversală de absorbție nu depinde de frecvența proprie a dipolului electric, însă rezultatele experimentale conduc la valori diferite pentru diferite frecvențe. Inainte de a fi analizate fenomenele forțate în cadrul mecanicii cuantice, discordanța dintre modelul clasic de dipol electric atașat unei tranziții și rezultatele experimentale corespunzătoare aceleași tranziții a fost depășită introducând pentru secțiunea integrală de absorbție a dipolului electric atașat tranziției, o expresie de forma:

$$\sigma_{integr.}=\frac{\pi e^2}{2\varepsilon_0 m_e c}f,$$

unde f reprezintă un parametru empiric, denumit *tăria oscilatorului*, definit ca raportul (vezi prg IV 7):

(1.20) $$f=\frac{\sigma_{masurat}}{\sigma_{integral\,clasic}}.$$

In general toate rezultatele teoretice obținute pe baza modelului oscilatorului clasic pot fi aduse în concordanță cu valorile experimentale dacă se înlocuiește mărimea $\frac{e^2}{m}$ cu $\frac{e^2}{m}f$. Calculele pe baza mecanicii cuantice înlătură necesitatea introducerii acestui parametru empiric.

1.2 Temperatura absolută negativă

Starea substanței în care s-a realizat inversia populației între două niveluri energetice (mediul activ) uneori este denumită și stare cu "*temperatură absolută negativă*". Aplicând legea de distribuție Boltzman celor două niveluri între care s-a realizat inversia, starea cu inversie de populație poate fi descrisă pur formal, introducând pentru cele două stări noțiunea de *temperatură absolută negativă*. Noțiunea nu are sens fizic ci numai un sens formal matematic, deoarece noțiunea de temperatură absolută caracterizează numai ansamblurile aflate în echilibru termodinamic.

Să considerăm un ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic caracterizat prin temperatura absolută T. Pentru simplificare considerăm că sistemele atomice prezintă numai două stări energetice $E_m > E_n$. Densitatea totală de sisteme atomice se repartizează între cele două stări, conform legii Boltzman:

(1.21) $$n_m=n_n\exp\left(-\frac{h\nu_{nm}}{kT}\right),\quad \text{unde: } n_m+n_n=n_v.$$

Din relația (1.21) se obține:

(1.22) $$T=\frac{h\nu_{mn}}{k\ln\left(\frac{n_n}{n_m}\right)}\quad (n_n > n_m,\ \text{deci: } T>0),$$

relație verificată de populațiile oricăror perechi de niveluri energetice ale sistemelor ansamblului aflat în echilibru termodinamic. Valoarea temperaturii obținută din relația (1.22) este independentă de valoarea frecvenței tranziției, precum și de densitatea de populație a celor două stări.

De asemenea din (1.21) rezultă:

(1.23) $$(a)\quad n_m=\frac{n_v}{1+e^{h\nu_{mn}/kT}},\qquad (b)\quad n_n=\frac{n_v}{1+e^{-h\nu_{mn}/kT}}$$

iar diferența densităților de populație este:

(1.24) $$\Delta n_{nm}=n_v\frac{e^{h\nu_{mn}/kT}-e^{-h\nu_{mn}/kT}}{2+e^{h\nu_{mn}/kT}+e^{-h\nu_{mn}/kT}}=n_v\,\mathrm{th}\frac{h\nu_{mn}}{2kT}.$$

Dacă considerăm drept referențial o stare a cărei energie este egală cu zero, dispusă la mijloc între cele două stări considerate mai sus, densitatea totală de energie a ansamblului corespunzătoare stărilor energetice este dată de relația:

(1.25) $$W=n_mE_m+n_nE_n=-\frac{n_v h\nu_{mn}}{2}\mathrm{th}\frac{h\nu_{mn}}{2kT}.$$

Dependența de temperatura ansamblului a diferenței densității populației celor două stări este prezentată în fig. 56 a, iar în fig. 56 b prezintă dependența de temperatură a densității energiei totale a ansamblului. In partea dreaptă temperatura ansamblului tinde la $(+0K)$, prin urmare, conform legii de distribuție Boltzman, toate sistemele atomice vor popula nivelul inferior $(\Delta n_{nm}\cong n_n\cong n_v)$, iar densitatea de energie are valoarea cea mai mică $\left(W\cong -n_v\frac{h\nu_{mn}}{2}\right)$. Odată cu creșterea temperaturii termodinamice a ansamblului, sistemele atomice populează și starea superioară, astfel

încât pentru $T \to \infty$ se obține $(n_m \cong n_n)$, iar energia ansamblului prezintă o valoare finită.

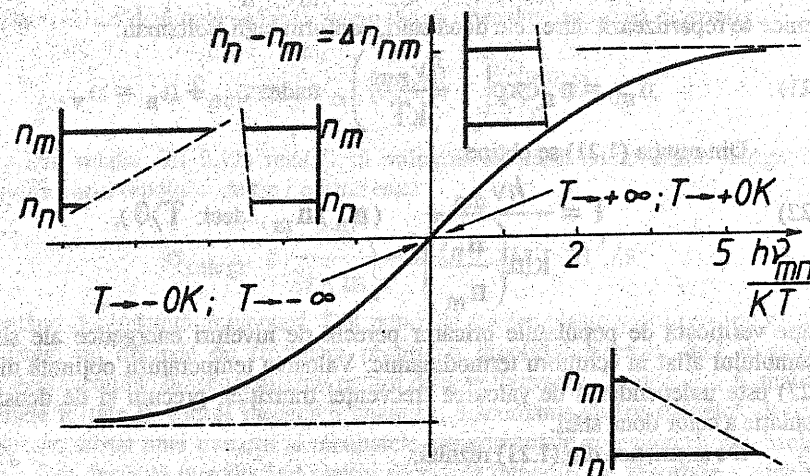


Fig. 56 a

Dacă printr-o metodă de populare selectivă între cele doua niveluri energetice se realizează inversie de populație, atunci acestora formal le putem aplica legea distribuției Boltzman și atașa inversiei respective o temperatură absolută dată de relația:

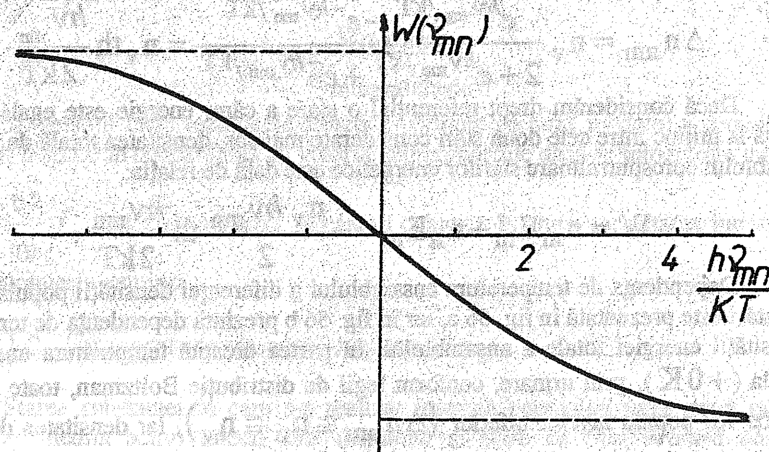


Fig. 56 b

(1.26)
$$T_{mn} = \frac{h\nu_{mn}}{k\ln\left(\frac{n_n}{n_m}\right)} \quad (n_n \langle n_m \text{, deci: } T \langle 0).$$

In acest caz valoarea "temperaturii absolute negative" depinde de valoarea frecvenței tranziției, precum și de valoarea inversiei de populație. Analog cu cazul ansamblului în echilibru termodinamic, situației când $(\Delta n_{nm} \cong -n_n \cong -n_v)$ i se poate atașa temperatura $T_{nm} \to -0\,K$, iar energia ansamblului prezintă valoarea cea mai mare $\left(W \cong n_v \frac{h\nu_{mn}}{2}\right)$, iar situației când $\Delta n_{nm} = 0$ $(n_m \cong n_n)$ i se va atașa temperatura $T_{nm} \to -\infty\,K$. Conceptul de temperatură absolută negativă este atașat unei tranziții și unei inversii date de populație a tranziției considerate.

2. Interacțiunea câmpului *em* al RCN cu ansamblul de sisteme atomice

In continuare va fi analizată interacțiunea dintre ansamblul de sisteme atomice și câmpul *em* al radiației corpului negru (RCN). (Uneori câmpul RCN este cunoscut și sub denumirea de *radiație termică, fluctuații termice* sau *zgomot*). In cele ce urmează RCN va reprezenta *mediul înconjurător* (*rezervorul*) *em* al sistemului considerat (ansamblul de sisteme atomice).

2.1 Densitatea spectrală de energie a RCN

Pe baza considerentelor termodinamicii se poate arăta că un volum spațial delimitat față de mediul înconjurător și aflat în echilibru termic cu acesta, conține câmp *em* caracterizat prin mărimea fizică *densitate de energie* a RCN. Densitatea de energie, respectiv mărimile caracteristice câmpului *em* al RCN - intensitatea câmpului electric - $\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$ și inducția câmpului magnetic - $\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$ - depind numai de temperatura caracteristică volumului spațial considerat și de cea a mediului înconjurător din vecinătatea imediată și nu depind de mărimea și forma volumului (dacă dimensiunile volumului sunt mari față de lungimea de undă a radiației *em* considerate). Mărimile $\mathbf{e}$ și $\mathbf{b}$ ale RCN sunt mărimi fizice reale, măsurabile, cu bandă spectrală largă asemănătoare zgomotului, a căror amplitudine, fază și polarizare au caracter aleator.

Densitatea de energie a RCN, conform teoriei lui Planck, este dată de relația:

(2.1)
$$\rho(\omega)_{RCN}\, d\omega = \frac{8\pi}{\lambda^3} \frac{\hbar d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1},$$

unde mărimea T_r reprezintă temperatura "mediului înconjurător", adică temperatura pereţilor delimitanţi ai volumului care absorb energie *em* şi determină valoarea densităţii de energie *em*, iar mărimea $\rho(\omega)_{RCN}$ - energia corespunzătoare unităţii de frecvenţă şi de volum, în domeniul de frecvenţă $d\omega$, centrat pe valoarea ω. In orice domeniu spectral $d\omega$, centrat pe frecvenţa ω, densităţii de energie RCN i se poate asocia o valoare medie pătratică a intensităţii câmpului electric, prin relaţia:

$$\rho(\omega)_{RCN} d\omega = \frac{\varepsilon}{2} d\left|\tilde{E}_{RCN}\right|^2. \tag{2.2}$$

Folosind relaţiile (2.1, 2.2), se poate stabili expresia modulului fazorului intensităţii câmpului electric al RCN:

$$d\left|\tilde{E}_{RCN}\right|^2 = \frac{16\pi}{\varepsilon\lambda^3} \frac{\hbar d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1}, \tag{2.3}$$

o mărime fizică ce poate fi măsurată, funcţie de ω şi T_r, folosind un receptor cu zgomot redus.

2.2 Tranziţii stimulate de către RCN.

Un sistem atomic ce aparţine ansamblului de sisteme delimitat de volumul considerat poate interacţiona cu câmpul electric al RCN prezentă în acest volum. Acest câmp determină tranziţii forţate a căror rată se poate calcula. Pentru a face aprecieri calitative, vom considera un contur al tranziţiei de tip Lorentz a cărui lăţime spectrală este foarte îngustă faţă de domeniul spectral al RCN.

Probabilitatea diferenţială a proceselor forţate va fi (I 2.3, 2.5):

$$d W_{12,RCN} = d W_{21,RCN} = \frac{3^*}{8\pi^2} \frac{\gamma_{rad}}{\hbar\Delta\omega_a} \frac{\varepsilon\lambda^3}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_a)}{\Delta\omega_a}\right]^2}$$

(Deoarece polarizarea câmpului electric - $\tilde{E}_{RCN}$ - este aleatoare, factorul (3^*) este egal cu unitatea).

Probabilitatea integrală a fenomenelor forţate corespunzătoare tranziţiei $1 \Leftrightarrow 2$, determinate de RCN, se obţine prin integrarea pe conturul tranziţiei:

$$W_{12,RCN} = W_{21,RCN} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\gamma_{rad}}{\hbar\Delta\omega_a} \frac{\varepsilon\lambda^3}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_a)}{\Delta\omega_a}\right]^2} \times \tag{2.4}$$

$$\times \frac{16\pi}{\varepsilon\lambda^3} \frac{\gamma_{rad}}{\hbar\Delta\omega_a} \frac{\hbar d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1} =$$

$$= \frac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi\Delta\omega_a} \frac{d\omega}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_a)}{\Delta\omega_a}\right]^2} = \frac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1}.$$

(Pe domeniul spectral al conturului tranziţiei, valoarea energiei RCN s-a aproximat cu valoarea ei pentru frecvenţa $\omega = \omega_a$).

Conform relaţiei (2.4), rata tranziţiilor forţate de către RCN între două niveluri energetice depinde numai de coeficientul de amortizare radiativ ($\gamma_{rad.}$) al nivelului superior şi de factorul Boltzmann corespunzător temperaturii radiaţiei şi nu depinde de caracteristicile conturului tranziţiei. Aceste tranziţii se produc în mod continu, în ambele sensuri; ele nu pot fi blocate deoarece ansamblul de sisteme atomice se află tot timpul în câmpul RCN. (Acestea ar putea fi înlăturate dacă temperatura ansamblului ar tinde la valoarea zero absolut). Existenţa acestor tranziţii stimulate implică transferul de energie de la câmpul RCN la ansamblul de sisteme atomice, proporţional cu densitatea diferenţei populaţiei ($\Delta n = n_1 - n_2$) între cele două niveluri.

Acest transfer de energie ridică problema echilibrului termic dintre ansamblul de sisteme atomice, caracterizat prin "temperatura atomică" (T_a) definită de distribuţia Boltzmann şi câmpul RCN, caracterizat prin temperatura termodinamică (T_r).

Pentru a rezolva această problemă, trebuie considerat faptul că fiecare sistem atomic care populează starea energetică superioară a tranziţiei poate reveni spre starea inferioară prin emisie spontană (relaxare radiativă), caracterizată prin coeficientul de relaxare radiativă ($\gamma_{rad.}$). Tranziţiile spontane sunt independente de prezenţa RCN. Ca rezultat al acestor tranziţii, sistemele atomice transferă mediului *em* înconjurător (RCN), o anumită cantitatea de energie care contribuie la realizarea echilibrului termic.

2.3 Echilibrul termic dintre ansamblul de sisteme atomice şi RCN.

In fig. 57 este prezentată diagrama schimbului de energie între RCN (caracterizată prin temperatura - T_r) şi ansamblul de sisteme atomice (caracterizat prin temperatura - T_a) prin intermediul proceselor de emisie spontană şi a celor forţate. Să calculăm raportul fluxului de energie cedat "mediului înconjurător" (RCN) de către ansamblul de sisteme aflat în echilibru termodinamic prin fenomenele de emisie

stimulată şi spontană la fluxul de energie primit de la RCN prin fenomenul forţat al absorţiei. Folosind relaţia (2.4) şi raportul Boltzmann al populaţiilor se obţine:

(2.5)
$$\frac{\text{flux cedat}}{\text{flux primit}}=\frac{\left(W_{21,RCN}+\gamma_{rad}\right)n_2}{W_{12,RCN}\,n_1}=$$
$$=\frac{\dfrac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT_r}\right)-1}+\gamma_{rad}}{\dfrac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT_r}\right)-1}}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_a}{kT_a}\right)=\exp\left[\frac{\hbar\omega}{k}\left(\frac{1}{T_r}-\frac{1}{T_a}\right)\right].$$

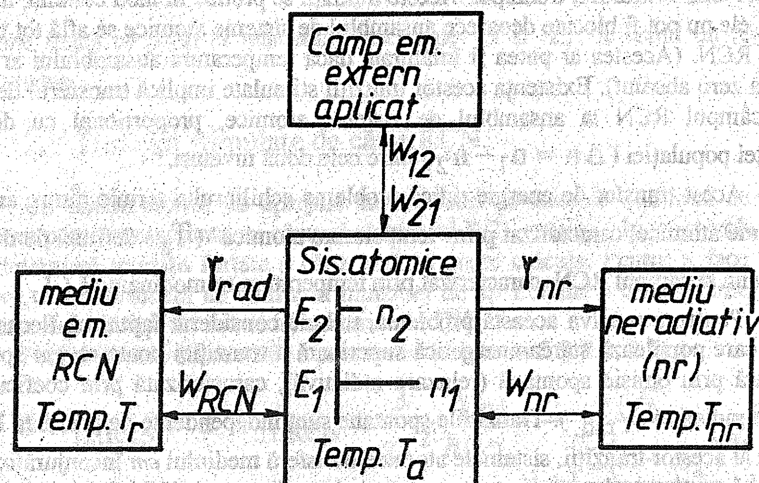


Fig. 57

Relaţia (2.5) arată că pentru a exista echilibru termic între cele două sisteme (RCN şi ansamblul de sisteme atomice) este necesar ca cele două temperaturi termodinamice să fie egale. In acest caz, deşi există interacţiune, nu va exista transfer de populaţie între cele două niveluri, deci nici transfer de energie între cele două sisteme macroscopice.

Pot fi analizate două cazuri:

- Dacă ansamblul de sisteme atomice sau o parte a acestuia, pentru un interval de timp, se află în echilibru termodinamic (populaţia nivelelor energetice satisface raportul Boltzmann, iar mişcarea internă a sistemelor atomice este complet

defazată) caracterizat prin temperatura T_a diferită de temperatura T_r a RCN (a pereţilor incintei), atunci între cele două sisteme (rezervoare termice) are loc o "scurgere" de energie, de la cel cu temperatură mai ridicată spre cel cu temperatura mai scăzută până la egalizarea acesteia. Datorită modificării temperaturii T_a, va exista o modificare a populaţiei nivelurilor energetice, astfel încât noua distribuţie să corespundă temperaturii de echilibru T_a.

- Dacă într-un ansamblu de sisteme atomice, printr-o metodă selectivă, între două niveluri energetice, s-a realizat inversie de populaţie caracterizată printr-o "temperatură" $T_a(\nu_{mn})$ (1.26) diferită de T_r, de asemenea va avea loc "scurgere" de energie până la egalizarea temperaturilor, iar raportul populaţiilor va fi fixat de raportul Boltzmann corespunzător temperaturii finale.

Rezultă că în cazul echilibrului termic între RCN şi ansamblul de sisteme atomice, cele trei "canale" de schimb de energie sub formă de radiaţie optică (RCN, tranziţii stimulate de către zgomot şi tranziţii spontane) se echilibrează prin corelare reciprocă (fig. 58); existenţa a două "canale" implică şi pe al treilea. Pentru a exista corelare reciprocă trebuie să se realizeze un "bilanţ detaliat" nu numai reciproc între tranziţii, ci şi în interiorul tranziţiilor, pe componentele cu diferite frecvenţe. Aceasta presupune că o tranziţie trebuie să prezinte exact acelaşi contur spectral atât pentru emisie spontană, cât şi pentru fenomenele stimulate: de tip Lorentz, Gauss sau de alte tipuri (vezi relaţia (2.4)).

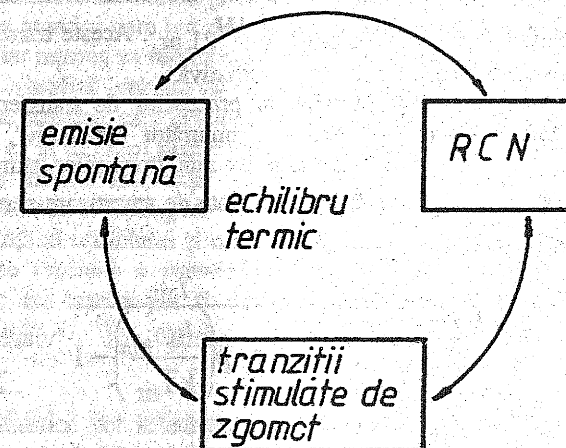


Fig. 58

De asemenea, rezultă că populaţia unui nivel energetic se poate relaxa "în jos" prin procese radiative (emisie spontană) şi emisie stimulată (relaxare determinată de interacţiunea cu mediul *em* înconjurător) având ca rezultat transferul de energie de la

sistemul atomic la mediul *em* înconjurător, în acelaşi timp, trebuie considerată şi relaxarea populaţiei "în sus", prin care sistemul atomic primeşte energie de la mediul *em* şi efectuează tranziţii spre nivelul energetic superior. Rata acestor procese depinde de populaţia nivelurilor energetice, în cazul particular al echilibrului termodinamic, de raportul Boltzmann al populaţiilor.

2.4 Relaxarea neradiativă.

In prg. 2.3 s-a analizat amortizarea energiei unui ansamblu de sisteme atomice corespunzătoare unui nivel energetic al sistemului atomic determinată de procesele de relaxare radiativă şi de interacţiunea dintre sisteme şi mediul înconjurător *em* (RCN). Insă procesul de amortizare a energiei se realizează şi prin "tranziţii neradiative", determinate de interacţiunea sistemelor cu aşa numitul "mediu înconjurător neradiativ" (partea dreaptă fig. 57). Acest mediu cu care se pot cupla sistemele atomice se concretizează, de ex. printr-o reţea cristalină-matrice dopată cu sisteme atomice active-laser, un solvent-lichid în care sunt solvite sisteme moleculare active-laser, alte sisteme atomice cu care se pot ciocni sistemele atomice active-laser sau pereţii tubului de descărcare.

Procesul de amortizare neradiativă este caracterizat prin *coeficientul de amortizare neradiativ* $\gamma_{ner.}$. Prin acest proces ansamblul de sisteme atomice schimbă energie cu "mediul înconjurător neradiativ". Din aceleaşi considerente termodinamice, prezentate în prg. 2.2, trebuie să acceptăm posibilitatea că "mediul înconjurător neradiativ" este capabil să determine în ansamblul de sisteme atomice "tranziţii stimulate neradiativ" între nivelurile energetice ale sistemului, caracterizate prin probabilităţile tranziţiei stimulate $W_{12,nr.}$ şi $W_{21,nr.}$. Aceste tranziţii suplimentare pot fi considerate drept tranziţii de relaxare neradiativă.

Pentru a analiza bilanţul detaliat al proceselor de transfer energetic între ansamblul de sisteme atomice şi "mediul înconjurător neradiativ", analog cu cele prezentate în prg. 2.2, trebuie să acceptăm că rata tranziţiilor stimulate neradiativ ($W_{12,nr.}$, respectiv $W_{21,nr.}$), este legată de rata de amortizare neradiativă, printr-o relaţie asemănătoare cu (2.4):

(2.6) $$W_{12,nr} = W_{21,nr} = \frac{\gamma_{nr}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_a}{kT_{nr}}\right) - 1}$$

sau, în general:

(2.6') $$W_{ji,nr} = \frac{g_i}{g_j} W_{ij,nr} = \frac{\gamma_{ji,nr}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_a}{kT_{nr}}\right) - 1},$$

unde T_{nr} - reprezintă "temperatura" caracteristică "mediului înconjurător neradiativ".

In condiţiile echilibrului termic, dacă relaţia (2.5) este îndeplinită, puterea schimbată de "mediul neradiativ" cu ansamblul de sisteme atomice prin intermediul tranziţiilor stimulate va fi compensată de cea cedată de către ansamblu "mediului înconjurător neradiativ" prin "procese de relaxare neradiativă". Prin urmare trebuie să acceptăm că "mediul înconjurător neradiativ" determină "tranziţii stimulate termic" "în sus" respectiv "în jos".

In cele prezentate, s-a considerat pe de o parte ansamblul de sisteme atomice caracterizat prin temperatura T_a şi ratele de amortizare radiativă (γ_{rad}) şi neradiativă (γ_{nr}), iar pe de altă parte "mediul înconjurător *em* - RCN", caracterizat prin temperatura T_r, respectiv "mediul înconjurător neradiativ" caracterizat prin temperatura T_{nr}. In general valorile celor două temperaturi (T_r şi T_{nr}) sunt egale, însă pot fi create situaţii în care acestea nu sunt egale. De ex. dacă considerăm "mediul înconjurător neradiativ" complet fără pierderi şi transparent în domeniul frecvenţelor de interes faţă de câmpul *em*, atunci cele două "medii înconjurătoare" pot fi considerate independente. In aceste condiţii se poate realiza situaţia în care valorile mărimilor T_r şi T_{nr} sunt diferite. De ex. prin răcirea unui cristal temperatura T_{nr} caracteristică vibraţiilor reţelei cristaline, devine mult mai mică faţă de temperatura T_r a mediului *em* - RCN".

Pentru a exemplifica aceste tranziţii să analizăm câteva cazuri.

a) *Interacţiunea fononică*

Vom considera un mediu-gazdă (matrice) sub forma unei reţele cristaline dopată cu sisteme atomice care pot deveni active-laser, acestea formând ansamblul de sisteme atomice, iar reţeaua va reprezenta "mediul înconjurător neradiativ".

Reţeaua cristalină prezintă vibraţii termice la orice temperatură finită. Acestora li se asociază unde acustice, care în volumul ocupat de reţea formează un sistem de unde staţionare. La fel ca şi în cazul unei cavităţi ce conţine câmp *em*, undele acustice sunt caracterizate prin diferite frecvenţe (valoarea acestora variază de la zero până la valoarea corespunzătoare distrugerii reţelei), diferite direcţii de propagare faţă de sistemul de referinţă al cristalului şi diferite polarizări. Analog cu cazul câmpului *em*, acestor unde li se asociază o *pseudo*particulă cunoscută sub denumirea de *fonon*. Vibraţiile termice ale reţelei pot fi caracterizate printr-o temperatură a "mediului înconjurător neradiativ" - T_{nr}. Intensitatea vibraţiilor reţelei va tinde la zero numai dacă $T_{nr} \to 0\,K$.

Undele acustice pot interacţiona cu sistemele atomice potenţial-active care dopează reţeaua cristalină, determinând tranziţii stimulate între două niveluri energetice convenabile ale acestora. Această interacţiune (cuplaj), exprimată prin "interferenţa" funcţiei de undă a stării energetice a sistemului atomic dispus în reţeaua cristalină şi funcţia ce descrie vibraţiile acustice, este asemănătoare cu cuplajul dintre acelaşi sistem atomic (dipol electric) (funcţia de undă a stării energetice) şi câmpul *em* înconjurător (unda *em* sau modurile câmpului *em*). Intensitatea ambelor cuplaje este de acelaşi ordin de mărime şi relativ slabă.

Din cauza acestei interacţiuni semnalul acustic sub forma oscilaţiilor reţelei ale căror frecvenţe se află în domeniul frecvenţei tranziţiei (ω_a) între două niveluri energetice ale sistemului atomic poate determina fenomene forţate între nivelurile considerate. Mărimea acestora va depinde de densitatea diferenţei populaţiilor şi caracteristicile tranziţiei (conturul spectral, lăţimea spectrală a conturului).

Dacă în ansamblul de sisteme atomice se realizează inversia de populaţie este posibilă amplificarea undei acustice considerate, ceea ce va determina apariţia oscilaţiilor reţelei cristaline la frecvenţa tranziţiei considerate a sistemului atomic. Se realizează în acest mod aşa numiţii *"laseri acustici"* sau *"maseri acustici"*, a căror existenţă a fost demonstrată experimental în special în domeniul de frecvenţă al microundelor, folosind aceleaşi metode de pompaj şi materiale ca şi în cazul generării oscilaţiilor *em* la aceleaşi frecvenţe (pe aceleaşi tranziţii atomice).

b) *Cazul ciocnirilor neelastice în gaze.*

Considerăm un amestec de gaze format din două componente A şi B, în care există posibilitatea ca sistemul atomic A, prin ciocnire neelastică cu sistemul B, să-i transfere o parte din energia internă (de excitare), aceasta contribuind la creşterea energiei cinetice a sistemului atomic B. Pentru sistemul atomic A, acest proces reprezintă o formă de relaxare neradiativă caracterizată prin rata amortizări neradiative γ_{nr} (conf. prg. IV 8 mărimea γ_{nr} va fi direct proporţională cu densitatea (presiunea parţială) a sistemelor atomice de tip B).

Din considerentele termodinamice prezentate anterior, deoarece există transfer de energie de la ansamblul de sisteme atomice A - la "mediul înconjurător neradiativ" (ansamblul de sisteme atomice B) - prin relaxări neradiative, trebuie să acceptăm posibilitatea că aceleaşi ciocniri pot determina "tranziţii stimulate prin ciocniri", între cele două niveluri energetice ale sistemului atomic A "în sus", respectiv "în jos" cu ratele $W_{12,nr}$, respectiv $W_{21,nr}$, date de relaţia (2.4), unde T_{nr} caracterizează mişcarea cinetică a ansamblului B ("mediul înconjurător neradiativ"). Aspectul fizic al reacţiei inverse a mişcării cinetice a ansamblului de sisteme atomice B, asupra ansamblului de sisteme A, în care ar trebui să rezulte "tranziţii stimulate prin ciocniri" nu este direct evident; în acelaşi timp nu este încă evidentă posibilitatea utilizării inversiei de populaţie a sistemelor atomice de tip A pentru a "amplifica prin tranziţii stimulate prin ciocnire" mişcarea cinetică a ansamblului de sisteme atomice de tip B. Însă este evident faptul că cele două "rezervoare" considerate sunt cuplate, fluctuaţiile termice ale mediului înconjurător neradiativ (rezervorul B) pot determina tranziţii stimulate termic "în sus" şi "în jos" în "ansamblul de sisteme atomice A". Reamintim că cicnirile dintre sistemele atomice contribuie la lărgirea tranziţiei omogene prin două căi. Dacă ciocnirile sunt elastice, acestea determină efecte de defazare a mişcării, contribuind la lărgire cu mărimea $(2/T_2)$, direct proporţională cu frecvenţa ciocnirilor (presiunea gazului). Dacă ciocnirile sunt neelastice acestea determină atât lărgirea prin defazarea mişcării, cât şi lărgirea prin amortizare neradiativă (micşorarea timpului de viaţă a sistemului atomic pe nivelul energetic considerat).

2.5 Rata relaxării totale a tranziţiilor.

Datorită interacţiunii ansamblului de sisteme atomice cu mediul înconjurător *em*", respectiv cu "mediul înconjurător neradiativ", rata depopulării celor două niveluri energetice (fig. 59) este dată de relaţiile:

$$\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{\substack{\text{relaxare}\\ \text{"în jos"}}} = \left(W_{21,RCN} + \gamma_r + W_{21,nr} + \gamma_{nr}\right) n_2 = w_{21} n_2$$

(2.7)

$$\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{\substack{\text{relaxare}\\ \text{"în sus"}}} = \left(W_{12,RCN} + W_{12,nr}\right) n_1 = w_{12} n_1$$

Mărimile prezente în relaţia (2.7), din punct de vedere fizic reprezintă:

- $W_{mn,RCN}$, respectiv $W_{nm,RCN}$ - probabilitatea proceselor forţate sub acţiunea RCN (mediului *em* înconjurător) (stimulare termică);
- $\gamma_{mn,rad}$, respectiv $\gamma_{mn,nr}$ - probabilitatea relaxării stării superioare m spre starea inferioară n prin procese radiative, respectiv neradiative;
- w_{mn}, respectiv w_{nm} - probabilitatea relaxării totale a nivelelor m, respectiv n.

În analiza prezentată stimularea tranziţiilor este determinată de interacţiunea cu câmpul *em* al RCN. Acestea pot fi de asemenea stimulate simultan şi de interacţiunea cu orice alt semnal *em* extern (pompaj optic sau câmp *em* extern) cu condiţia îndeplinirii cuplajului în frecvenţă între câmp şi tranziţie) (fig. 57). Probabilitatea acestor procese forţate este notată cu W_{mn}, respectiv W_{nm}. Intensitatea componentei electrice a semnalului *em* extern este inclusă în expresia probabilităţii procesului forţat.

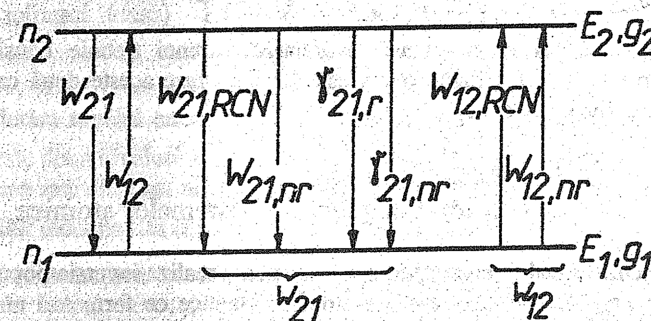


Fig. 59

Dacă se consideră că $T_r = T_{nr} = T$, iar ansamblul de sisteme atomice se află în echilibru termic cu "mediul înconjurător", atunci raportul dintre probabilitatea relaxării totale "în sus" şi "în jos" (2.4, 2.6) este egal cu raportul Boltzmann:

$$\frac{w_{12}(\uparrow)}{w_{21}(\downarrow)} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}, \text{ sau: } \frac{w_{ij}(\uparrow)}{w_{ji}(\downarrow)} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\frac{E_j-E_i}{kT}}, \tag{2.8}$$

dacă nivelurile 1 şi 2 sunt degenerate, unde indicii i, j indică subnivelurile.

Rata relaxării "în sus" este totdeauna mai mică decât cea a relaxării "în jos" (relaxarea spontană plus relaxarea forţată). Raportul Boltzmann nu depinde de natura sau intensitatea mecanismelor de relaxare considerate, ci numai de temperatura T. Dacă "mediul înconjurător radiativ", respectiv "neradiativ" se află la temperaturi diferite, atunci expresia raportului (2.8) este mai complicată.

Deoarece pentru domeniul vizibil al spectrului: $\frac{\hbar\omega_a}{k} \cong 25000\,\mathrm{K}$, dacă temperatura ansamblului de sisteme atomice este: $T = 3000\,\mathrm{K}$, atunci:

$$\exp\left(-\frac{\hbar\omega_a}{kT}\right) \cong \exp\left(-\frac{25000}{300}\right) \cong 10^{-36}.$$

In aceste condiţii valoarea termenilor corespunzători relaxării stimulate este neglijabilă faţă de cea a relaxării spontane, deci probabilităţile de relaxare, în acest caz pot fi aproximate prin:

$$\begin{aligned} w_{nm}(\uparrow) &\cong 0 \\ w_{mn}(\downarrow) &= \gamma_{mn} = \gamma_{mn,rad} + \gamma_{mn,nr} \end{aligned} \tag{2.9}$$

condiţii cunoscute sub denumirea de *aproximaţia frecvenţei optice* ".

Dacă este îndeplinită condiţia $\hbar\omega \ll kT$ (cazul laserilor din domeniul microundelor şi cel al rezonanţei magnetice), atunci trebuie consideraţi termenii relaxării forţate. Cazul tranziţiilor IR este cuprins între aceste două cazuri extreme şi necesită o analiză concretă.

3. Cinetica populării nivelurilor energetice ale sistemelor atomice

Pentru a stabili condiţiile în care se poate realiza inversia populaţiei între două niveluri energetice ale unor sisteme atomice identice ce formează un ansamblu, este necesar să se cunoască cinetica populării nivelurilor cu sisteme atomice în prezenţa pompajului. Pentru aceasta este necesar să se alcătuiască şi să se rezolve ecuaţiile ce descriu cinetica (ecuaţiile de bilanţ sau ecuaţiile ratelor) populării nivelurilor energetice corespunzătoare. In acest scop trebuie să se cunoască: sistemul de stări energetice, tranziţiile permise între aceste stări, precum şi probabilitatea tranziţiilor între diferite niveluri.

Sistemul atomic real prezintă un număr foarte mare de niveluri energetice (E_i), cu diferite grade de degenerare (g_i), a căror densitate de populaţie depinde de timp $n_i(t)$ (fig. 60). Intre diferite perechi de niveluri pot apare procese de relaxare permise de regulile cuantice de selecţie; de asemenea sistemul atomic poate fi perturbat simultan (pe mai multe tranziţii) dacă asupra lui acţionează un câmp *em* extern complex ce conţine radiaţii optice cu frecvenţe ce sunt în rezonanţă cu unele frecvenţe ale tranziţiilor sistemului $\omega_{mi} = (E_m - E_i)/\hbar$. Pentru a asigura condiţia de interacţiune a semnalui extern numai cu o tranziţie dată, presupunem că frecvenţele de rezonanţă ale tranziţiilor cărora li se aplică semnale externe diferă una de alta cel puţin prin câteva lăţimi spectrale.

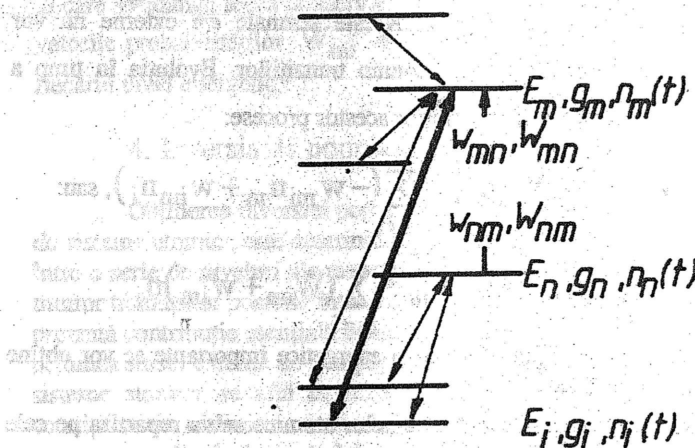


Fig. 60

Considerăm nivelul energetic E_m şi un nivel superior sau inferior faţă de acesta. Intre aceste două niveluri se realizează relaxarea populaţiilor prin:

- relaxare radiativă sau neradiativă şi prin interacţiune cu "mediul înconjurător RCN" sau "mediul înconjurător neradiativ" (probabilitate de relaxare totală w_{mi});

- şi prin interacţiune cu câmpul *em* extern caracterizat prin frecvenţa ω_{mi}, caracterizat prin probabilitatea W_{mi}.

Cinetica populării nivelului E_m este descrisă de o ecuaţie asemănătoare cu (2.7):

$$\frac{dn_m}{dt} = -\frac{dn_i}{dt} = -W_{mi}n_m + W_{im}n_i - w_{mi}n_m + w_{im}n_i,$$

unde probabilitatea proceselor forțate este descrisă de o relație de forma (I 2.3, 2.5):

$$W_{mi} = \frac{g_i}{g_m} W_{im} = \frac{3^*}{8\pi^2} \frac{\gamma_{im,rad}}{\hbar \Delta\omega_{mi}} \frac{\varepsilon \lambda_{mi}^3 \left|\tilde{E}_{mi}\right|}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_{mi})}{\Delta\omega_{mi}}\right]^2},$$

dacă tranziția este omogenă de tip Lorentz.

Evoluția în timp a populării nivelului E_m în cazul sistemului atomic real *multi*nivel este determinată pe de o parte de toate relaxările între acest nivel și celelalte niveluri superioare sau inferioare, iar pe de altă parte de relaxările forțate dintre acest nivel și alte niveluri, dacă nivelul E_m participă la formarea unor tranziții cărora li se aplică semnale *em* externe rezonante (ω_{mi}). Aceste semnale *em* externe nu vor interacționa între ele, deși nivelul E_m este comun tranzițiilor. Evoluția în timp a populației $n_m(t)$ este descrisă de sumarea tuturor acestor procese:

$$\frac{dn_m}{dt} = \sum_{m \neq i} \left(-W_{mi} n_m + W_{im} n_i\right) + \sum_{m \neq i} \left(-w_{mi} n_m + w_{im} n_i\right), \text{ sau:}$$

$$\text{(3.1)} \qquad \frac{dn_m}{dt} = \sum_{m \neq i} -\left(W_{mi} + w_{mi}\right) n_m + \sum_{m \neq i} \left(W_{im} + w_{im}\right) n_i .$$

Dacă sistemul atomic prezintă M niveluri energetice importante se vor obține M ecuații diferențiale de tipul (3.1).

Pe de altă parte densitatea (n_v) a sistemelor atomice se va repartiza pe cele M niveluri ale sistemului, deci trebuie îndeplinită condiția:

$$\text{(3.2)} \qquad \sum_{m=1}^{M} n_m(t) = n_1(t) + n_2(t) + \cdots + n_M(t) = n_v ,$$

care reprezintă legea conservării numărului de sisteme atomice. Ca rezultat din cele M ecuații diferențiale numai $(M-1)$ sunt liniar independente.

Dacă se consideră că tranziția spectrală a mediului activ este relativ îngustă, atunci, pe domeniul spectral al tranziției, mărimea $\rho(\omega)$ poate fi considerată constantă, iar expresia coeficienților Einstein (IV 3.6) ia forma:

$$\int b_{mi}(\omega) \rho(\omega) d\omega = \rho(\omega_{mi}) \int b_{mi}(\omega) d\omega = B_{mi}\, \rho(\omega_{mi}).$$

Această relație poate fi utilizată pentru a calcula probabilitatea tranziției în canalul de pompaj.

In canalul de generare, lățimea spectrală a radiației generate este îngustă față de lățimea conturului de absorbție, deci:

$$\int b_{mi}(\omega) \rho(\omega) d\omega = b_{mi}(\omega_g) \int \rho_{mi}(\omega) d\omega \cong b_{mi}(\omega_g) \rho_{mi}(\omega_g) \Delta\omega_g ,$$

unde ω_g - frecvența radiației generate, iar: $\int \rho_{mi}(\omega) d\omega = \rho(\omega_g) \Delta\omega_g$ - densitatea integrală a radiației generate.

In procesul de interacțiune dintre ansamblul de sisteme atomice *multi*nivel și câmpul *em* extern care conține mai multe frecvențe în rezonanță cu frecvența unor tranziții se poate stabili un regim staționar (independent de timp) al populației nivelelor $(n_{i,ss} \to ss$ - stare staționară). In aceste condiții setul (3.1) format din $(M-1)$ ecuații diferențiale devine un set de $(M-1)$ ecuații algebrice liniare, cuplate între ele de tipul:

$$\text{(3.3)} \qquad \sum_{m \neq i} -\left(W_{mi} + w_{mi}\right) n_m + \sum_{m \neq i} \left(W_{im} + w_{im}\right) n_i = 0 ,$$

la care se adaugă legea conservării numărului de sisteme atomice (3.2). Dacă se cunosc valorile probabilităților W_{mi} și w_{mi} se poate calcula valoarea populației $n_{i,ss}$ a fiecărui nivel energetic.

4. Inversia de populație

Obținerea inversiei populației între două niveluri energetice ale unui ansamblu de sisteme atomice este determinată de procesele elementare care se produc la tranziția între o serie de niveluri ale sistemului. In majoritatea cazurilor nu este necesară analiza tuturor tranzițiilor posibile între toate nivelurile. Pot fi considerate numai tranzițiile care prezintă contribuție esențială la modificarea populării celor două niveluri energetice sub acțiunea sursei externe de pompaj față de popularea acestora în cazul când ansamblul de sisteme atomice se află în echilibru termodinamic. Pentru a putea efectua analiza condițiilor de realizare a inversiei de populație, se folosește o schemă simplificată în care un grup de niveluri este înlocuit printr-un nivel echivalent, caracterizat de timpul de viață efectiv τ_m. Popularea cu sisteme atomice a unui nivel energetic la un moment dat este rezultatul concurenței proceselor de populare prin fenomene spontane și forțate și a celor de depopulare prin mecanisme de relaxare. Depopularea unui nivel energetic se realizează prin tranziții radiative și neradiative.

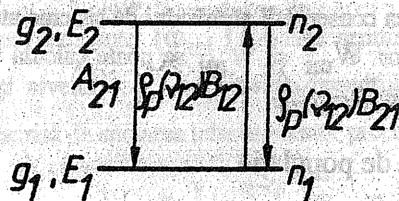
Considerând aceste simplificări, se pot deosebi materiale potențial active care pot fi reprezentate prin scheme cu două, trei și patru niveluri energetice, prin intermediul cărora se realizează inversia populației. La toate tipurile de scheme energetice, nivelul cel mai de jos reprezintă nivelul fundamental al sistemului atomic.

4.1 Schema cu două niveluri energetice

Considerăm un sistem cu două niveluri energetice E_1 și E_2, din care cel inferior (E_1) reprezintă starea fundamentală a sistemului atomic. Dacă $kT \langle\langle E_2 - E_1$, în condițiile echilibrului termodinamic, toate sistemele atomice

populează nivelul energetic inferior. Cele două niveluri sunt caracterizate prin factorii de degenerare g_1 și g_2 și densitățile populației n_1 și n_2 (fig. 61 a).

Dacă ansamblul de sisteme atomice este supus unui pompaj optic la frecvența $\nu = \nu_{12} = \dfrac{E_1 - E_2}{h}$, caracterizat prin densitatea spectrală energetică $\rho_p(\nu_{12})$, atunci alături de tranzițiile spontane au loc și tranziții forțate care contribuie la variația în timp a populării nivelurilor energetice. Dacă între procesele ce determină popularea unui nivel se realizează un regim staționar, se pot scrie relațiile:



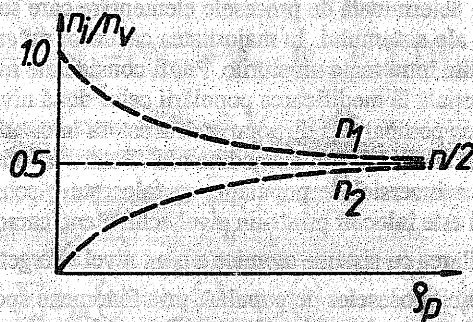


Fig. 61 a,b

$$\text{a)}\quad \frac{dn_1}{dt} = (A_{21} + \rho_p B_{21})n_2 - \rho_p B_{12} n_1 = 0$$

$$(4.1)\quad \text{b)}\quad \frac{dn_2}{dt} = \rho_p B_{12} n_1 - (A_{21} + \rho_p B_{21})n_2 = 0$$

$$\text{c)}\quad n_v = n_1 + n_2$$

Considerând relația: $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$, populațiile sunt date de expresiile:

$$(4.2)\,\text{a)}\quad n_2 = \frac{\dfrac{g_2}{g_1} B_{21} n_v}{\dfrac{A_{21}}{\rho_p} + B_{21}\left(1 + \dfrac{g_2}{g_1}\right)} \qquad \text{b)}\quad n_1 = \frac{\left(\dfrac{A_{21}}{\rho_p} + B_{21}\right) n_v}{\dfrac{A_{21}}{\rho_p} + B_{21}\left(1 + \dfrac{g_2}{g_1}\right)}.$$

Dacă densitatea energetică a sursei de pompaj devine foarte mare, populațiile tind la valorile: $n_1 \to \dfrac{g_1}{g_1 + g_2} n_v$; $n_2 \to \dfrac{g_2}{g_1 + g_2} n_v$. Chiar dacă $g_2 > g_1$, între cele două niveluri nu se poate realiza inversia populației prin pompaj optic sau prin descărcări în gaze. Popularea celor două niveluri degenerate, pentru $\rho_p \to \infty$ devine egală: $\dfrac{n_2}{g_2} = \dfrac{n_1}{g_1} = \dfrac{n_v}{g_1 + g_2}$. In cazul nivelurilor nedegenerate se obține:

$$n_1 = n_2 = \frac{n_v}{2}.$$

Variația populației nivelurilor nedegenerate funcție de densitatea energiei de pompaj este prezentată în fig. 61 b. Dacă $\rho_p \to \infty$, populațiile se egalează, deci mediul devine "transparent" pentru radiția cu frecvența ν_{12}, iar coeficientul de absorbție $a(\nu_{12}) \to 0$. In acest caz inversia populației se poate obține numai dacă pentru popularea celor două niveluri se folosesc mecanisme diferite și anume metode de sortare spațială a sistemelor atomice. De ex. în cazul maserului cu amoniac sau cel cu hidrogen molecular inversia populației se realizează prin metode neoptice.

4.2 Schema cu trei niveluri energetice

Funcție de dispunerea nivelurilor între care se realizează inversia populației se deosebesc două tipuri de scheme cu trei niveluri energetice. In primul caz nivelul final al tranziției laser este chiar cel fundamental (fig. 62 a), iar în al doilea caz este nivelul excitat E_2 (fig. 62 b). Pentru simplificare presupunem nivelurile energetice nedegenerate $(g_1 = g_2 = g_3 = 1)$.

Spre deosebire de schema cu două niveluri energetice, în acest caz canalul de pompaj $(E_1 \Rightarrow E_3)$ este diferit de canalul nivelurilor energetice între care se realizează inversia de populație $(E_2 \Rightarrow E_1)$, respectiv $(E_3 \Rightarrow E_2)$. Aceasta permite realizarea pompajului atât cu surse optice cât și cu ajutorul descărcărilor în gaze.

Presupunem că pompajul se realizează prin metode optice în canalul $(E_1 \Rightarrow E_3)$, iar excitarea datorită pompajului în canalele $(E_2 \Rightarrow E_3)$ și $(E_1 \Rightarrow E_2)$ este neglijabilă. Procesele de relaxare $(E_3 \Rightarrow E_2)$ sunt caracterizate prin probabilitatea de relaxare:

$$w_{32} = A_{32} + \gamma_{nr,32} = \frac{1}{\tau_{32}},$$

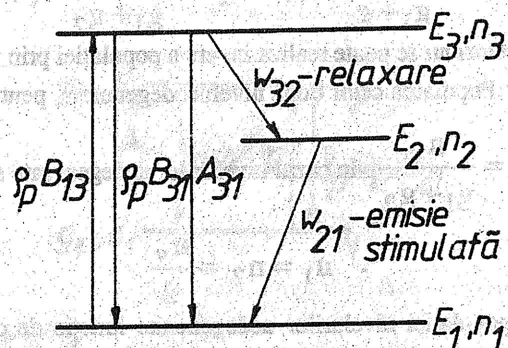


Fig. 62 a

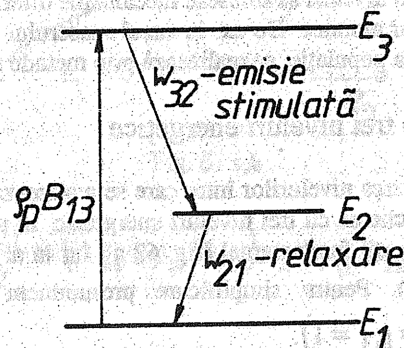


Fig. 62 b

unde: A_{32} caracterizează relaxarea radiativă, iar $\gamma_{32\,nr}$ pe cea neradiativă. Ecuațiile cinetice care descriu evoluția populației nivelurilor în cazul sistemului de tipul întâi sunt:

(4.3)
$$\text{a)} \quad \frac{dn_3}{dt} = \rho_p B_{13} n_1 - \rho_p B_{31} n_3 - n_3\left(\frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}}\right),$$
$$\text{b)} \quad \frac{dn_2}{dt} = \rho B_{12} n_1 - \rho B_{21} n_2 + \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}}$$

unde ρ reprezintă densitatea de energie cu frecvența ν_{21} obținută ca rezultat al proceselor stimulate între nivelurile $E_3 \Leftrightarrow E_2$. Deoarece densitatea de sisteme atomice a ansamblului (n_v) este distribuită între cele trei niveluri energetice, există relația:

(4.3) $\quad$ c) $\; n_1 + n_2 + n_3 = n_v$,

de unde rezultă: $\dfrac{dn_1}{dt} + \dfrac{dn_2}{dt} + \dfrac{dn_3}{dt} = 0$, deci:

$$\frac{dn_1}{dt} = \rho(B_{21} n_2 + B_{12} n_1) + \rho_p(B_{31} n_3 - B_{13} n_1) + \frac{n_3}{\tau_{31}} + \frac{n_2}{\tau_{21}}.$$

Considerăm cazul când materialul activ nu este introdus într-o cavitate rezonantă, deci densitatea de radiație $\rho(\nu_{32})$ este suficient de mică încât pot fi neglijate procesele stimulate între nivelurile $E_1 \Leftrightarrow E_2$. Ecuațiile cinetice în regim staționar devin:

(4.4)
$$\text{a)} \quad \frac{dn_3}{dt} = \rho_p B_{13} n_1 - \rho_p B_{31} n_3 - \frac{n_3}{\tau_3} = 0$$
$$\text{b)} \quad \frac{dn_2}{dt} = \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}} = 0 \qquad \text{, de unde:}$$
$$\text{c)} \quad n_1 + n_2 + n_3 = n_v$$

(4.5)
$$\text{a)} \quad n_3 = \frac{\tau_{32}\, n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32} + \dfrac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}}$$
$$\text{b)} \quad n_2 = \frac{\tau_{21}\, n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32} + \dfrac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}}$$

$$c)\quad n_1 = \frac{\left(\tau_{32} + \dfrac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}\right) n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32} + \dfrac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}}.$$

Variația densității populației funcție de densitatea de energie a sursei de pompaj este prezentată în fig. 63. La densități mari de energie $(\rho_p \to \infty)$ populațiile tind la valorile:

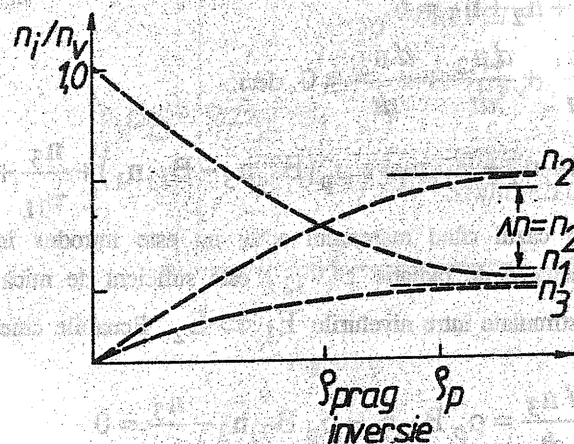


Fig. 63

$$n_1, n_3 \to \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32}} \to 0, n_2 \to \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32}}, \text{dacă: } \tau_{21} \rangle\rangle \tau_{32}.$$

Dacă: $\tau_{21} \rangle\rangle \tau_{32}$, începând cu valoarea $\rho_{prag\,inversie}$ a pompajului se realizează inversia de populație. Această valoare reprezintă densitatea de energie de pompaj necesară atingerii *pragului inversiei de populație*. Din condiția: $n_1 = n_2$ se obține valoarea densității de prag:

(4.6) $$\rho_{prag\,inv.} = \frac{1}{B_{31}\left(1 - \dfrac{\tau_{32}}{\tau_{21}}\right)\dfrac{\tau_3}{\tau_{32}}\tau_{21}} = \frac{1}{B_{31}(1-\beta)\eta\tau_{21}}.$$

Existența pragului de inversie este determinată de faptul că starea inferioară a tranziției laser, la echilibru termodinamic, este puternic populată (se poate considera că

inițial popularea nivelului E_1 este egală cu n_v), iar inversia de populație începe să se realizeze din momentul în care jumătate din numărul de sisteme atomice se află pe nivelul E_2.

Din relația (4.6), ca și din cele anterioare, rezultă că pentru a realiza acumulare de sisteme atomice pe starea E_2 este necesară o valoare τ_{32} foarte mică (tranziția $E_3 \Rightarrow E_2$ rapidă, deci relaxare prin tranziții neradiative), o valoare τ_{21} foarte mare (nivelul E_2 metastabil) și un coeficient B_{13} foarte mare (tranziția optică $E_1 \Rightarrow E_3$ aproape interzisă). De asemenea pentru a asigura eficiența pompajului este necesar ca toate sistemele atomice să treacă de pe nivelul E_3 pe E_2, deci timpul de relaxare corespunzător tranziției $E_3 \Rightarrow E_1$ (τ_{31}) trebuie să fie mare.

In condițiile impuse, densitatea inversiei de populației este dată de relația:

$$\Delta n = n_2 - n_1 =$$

(4.7) $$= \frac{\left(1 - \dfrac{\tau_{32}}{\tau_{21}}\right)\rho_p B_{31}\tau_{21}\dfrac{\tau_3}{\tau_{32}} - 1}{\left(1 + 2\dfrac{\tau_{32}}{\tau_{21}}\right)\rho_p B_{31}\tau_{21}\eta\dfrac{\tau_3}{\tau_{32}} + 1} = \frac{(1-\beta)\rho_p B_{31}\tau_{21}\eta - 1}{(1+2\beta)\rho_p B_{31}\tau_{21}\eta + 1},$$

unde: $\beta = \dfrac{\tau_{32}}{\tau_{21}}$, iar: $\mu = \dfrac{\tau_3}{\tau_{32}}$ - factorul de eficiență al pompajului - reprezintă fracția de sisteme atomice excitate prin pompaj pe nivelul E_3 care trec pe E_2, devenind astfel utile pentru realizarea inversiei de populație. Pentru un material ideal este necesar ca: $\beta \to 0$ și $\eta \to 1$, adică mărimea τ_{32} să fie foarte mic (deci $\tau_3 \cong \tau_{32}$) și τ_{21} foarte mare.

Pentru a menține valoarea staționară a inversiei de populație în cazul materialelor ideale cu trei niveluri energetice este necesar ca puterea sursei de pompaj să fie cel puțin egală cu:

(4.8) $$P_{pompaj} = \frac{n}{2}\frac{h\nu_{13}}{\tau_{21}}.$$

Din această putere o parte se regăsește sub formă de radiație, restul fiind disipată în material prin diferite mecanisme:

(4.9) $$P_{disipat} = \frac{n}{2}\frac{h\nu_{32}}{\tau_{21}}.$$

Această putere trebuie îndepărtată în mod eficient din material deoarece poate să-l distrugă, de ex. prin efecte termice.

Un exemplu de material laser activ al cărui sistem de niveluri energetice poate fi redus la schema cu trei niveluri este reprezentat de către ansamblul de ioni de crom $\left(Cr^{3+}\right)$ care dopează rețeaua cristalină a safirului: $Al_2O_3 : Cr^{3+}$.

4.3 Schema cu patru niveluri energetice.

In această schemă canalul prin care se realizează pompajul este complet diferit de cel prin care se realizează generarea radiației, ceea ce permite obținerea inversiei de populație chiar la puteri mici ale sursei de pompaj. In fig. 64 a sunt reprezentate cele patru niveluri energetice implicate în proces. Pompajul se realizează pe canalul $E_1 \Rightarrow E_2$, iar inversia se obține între stările $E_3 \Rightarrow E_2$. Ca și în cazul precedent, pentru simplificare, vom presupune că nivelurile energetice sunt nedegenerate.

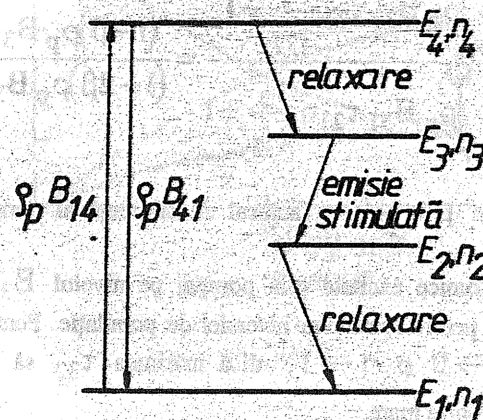


Fig. 64 a

Variația în timp a densității de populație a nivelurilor energetice este dată de relațiile:

$$\text{a)}\quad \frac{d\,n_4}{dt} = \left(\rho_p\, B_{14} n_1 - \rho_p\, B_{41} n_4\right) - \frac{n_4}{\tau_{43}} - \frac{n_4}{\tau_{42}} - \frac{n_4}{\tau_{41}} = \rho_p\, B_{14}\left(n_1 - n_4\right) - \frac{n_4}{\tau_4}$$

$$\text{(4.10)}\quad \text{b)}\quad \frac{d\,n_3}{dt} = \left(\rho\, B_{23} n_2 - \rho\, B_{32} n_3\right) + \frac{n_4}{\tau_{43}} - \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_3}{\tau_{31}}$$

$$\text{c)}\quad \frac{d\,n_2}{dt} = \left(\rho\, B_{32} n_3 - \rho\, B_{23} n_2\right) + \frac{n_4}{\tau_{42}} + \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}}$$

Intre densitățile de populație există relația:

$$\text{(4.10)}\quad \text{d)}\quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_v,$$

de unde rezultă: $\frac{d\,n_1}{dt} = \left(\rho_p\, B_{41} n_4 - \rho_p\, B_{14} n_1\right) + \frac{n_4}{\tau_{41}} + \frac{n_3}{\tau_{31}} + \frac{n_2}{\tau_{21}}.$

Vom considera cazul când materialul activ nu este introdus într-un rezonator optic, deci densitatea de radiație $\rho\left(\nu_{32}\right)$ are o valoare foarte mică astfel încât procesele forțate între nivelurile $E_3 \Rightarrow E_2$ pot fi neglijate. Pentru a obține o inversie de populație eficientă este necesar ca nivelurile energetice să se relaxeze numai pe anumite canale. Populația nivelului E_4 trebuie să se relaxeze cât mai rapid spre E_3, deci este necesar ca timpul τ_{43} să fie cât mai mic, iar timpurile τ_{42} și τ_{41} cât mai mari (tranziții interzise). Populația nivelului E_3 trebuie să se relaxeze numai spre E_2, deci timpul τ_{31} cât mai mare, populația nivelului E_2 să se relaxeze spre E_1 cât mai rapid, deci τ_{21} cât mai mic. Pentru a obține inversie de populație cât mai mare este necesar ca nivelul E_3 să fie populat, iar E_2 foarte puțin populat. In acest scop tranziția $E_4 \Rightarrow E_2$ trebuie să fie interzisă (τ_{42} cât mai mare), iar timpul de viață al nivelului E_2 cât mai mic. In aceste condiții ecuațiile cinetice în regim staționar devin:

$$\text{a)}\quad \frac{d\,n_4}{dt} = \rho_p\, B_{41}\left(n_1 - n_4\right) - \frac{n_4}{\tau_{43}} = 0$$

$$\text{(4.11)}\quad \text{b)}\quad \frac{d\,n_3}{dt} = \frac{n_4}{\tau_{43}} - \frac{n_3}{\tau_{32}} = 0$$

$$\text{c)}\quad \frac{d\,n_2}{dt} = \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}} = 0$$

$$\text{d)}\quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_v$$

care conduc la densitățile de populație:

(4.12)

$$\text{a)}\quad n_4 = \frac{\tau_{43} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{43} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

$$\text{b)}\quad n_3 = \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

$$\text{c)}\quad n_2 = \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

$$\text{d)}\quad n_1 = \frac{\left(\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}\right) n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{43} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

In fig. 64 b este prezentată grafic dependența densităților de populație de densitatea energiei de pompaj ρ_p, pentru cazul $\tau_{32} > \tau_{21}$ și $\tau_{43} > \tau_{21}$.

Densitatea inversiei de populație este dată de relația:

$$\Delta n_{32} = n_3 - n_2 = \frac{(\tau_{32} - \tau_{21}) n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}}. \tag{4.13}$$

Se obține inversie de populație chiar la densități mici ale energiei sursei de pompaj, iar mărimea densității inversiei de populație depinde de timpurile de viață τ_{32} și τ_{21}.

In condiții ideale, pentru a menține inversia populației la valoarea ei staționară, în cazul materialelor cu patru niveluri energetice este necesar ca puterea sursei de pompaj să fie cel puțin egală cu:

$$P_{pompaj} = \frac{(n_3 - n_2) h\nu_{14}}{\tau_{32}}. \tag{4.14}$$

O parte din această putere se regăsește sub formă de radiație, iar restul este disipată în material prin diferite mecanisme:

$$P_{disipat} = \frac{(n_3 - n_2)(h\nu_{43} + h\nu_{21})}{\tau_{32}}. \tag{4.15}$$

Din categoria materialelor laser active care pot fi reprezentate printr-o schemă cu patru niveluri energetice fac parte de ex. ansamblul format din ioni de neodim (Nd^{2+}) care dopează o sticlă sau ansamblul atomilor de neon în cazul laserului He–Ne.

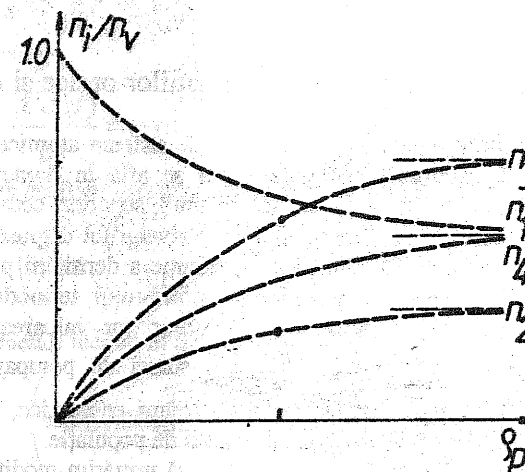


Fig. 64 b

Atât în cazul materialelor cu trei niveluri energetice cât și în cel al materialelor cu patru niveluri se pot face unele observații generale:

- Pentru a exclude popularea nivelurilor energetice în cazul echilibrului termodinamic este necesar ca distanța energetică a nivelurilor E_4, E_3 și în special E_2, față de E_1, să fie mult mai mare decât mărimea kT. In același timp intervalele energetice $E_4 - E_3$ și $E_2 - E_1$ să nu fie prea mari, deoarece s-ar disipa o cantitate prea mare din energia de pompaj pe canale neeficiente.
- In ambele cazuri timpurile de relaxare τ_{32}, respectiv τ_{43}, trebuie să fie mici, ceea ce face ca starea energetică de pompaj E_3 (respectiv E_4) să prezinte lățime spectrală mare. Acest fapt are influență pozitivă asupra randamentului de pompaj. In cazul pompajului optic acesta se realizează cu surse optice a căror domeniu spectral este larg față de domeniul de absorbție al tranziției, deci randamentul de utilizare va depinde de lățimea energetică a acestor niveluri. Același lucru este valabil și în cazul descărcărilor în gaze în care se realizează o distribuție continuă după viteze a densității de electroni.

- Pentru a exclude autoabsorbţia pe tranziţiile $E_4 \Rightarrow E_3$ şi $E_2 \Rightarrow E_1$ este de dorit ca procesele de relaxare între aceste stări să se realizeze prin tranziţii neoptice.

- Pentru a folosi în mod util sistemele atomice ce populează nivelul superior al tranziţiei laser, este necesar ca timpul de viaţă al acestuia să fie determinat numai de procese radiative, probabilitatea proceselor neradiative de pe aceste niveluri să fie cât mai mică.

5. Interacţiunea dintre câmpului radiaţiilor optice şi mediul activ.

In prg. 4 s-a stabilit că într-un ansamblu de sisteme atomice identice supus acţiunii unei radiaţii de pompaj a cărei frecvenţă se află în domeniul spectral al frecvenţei tranziţiei între nivelul fundamental şi unul superior convenabil, are loc modificarea densităţii populării cu sisteme atomice a nivelurilor dispuse între cele două niveluri menţionate. La un moment dat, noua distribuţie a densităţii populaţiei devine staţionară, dar diferită de cea corespunzătoare echilibrului termodinamic; ea este determinată de caracteristicele cuantice ale nivelurilor, iar valoarea ei depinde de mărimea densităţii spectrale de energie (ρ_P) a sursei de pompaj. Pentru valori convenabile ale caracteristicilor cuantice a două niveluri energetice, între populaţiile acestora se poate realiza o stare cu inversie a densităţii de populaţie.

Considerând această situaţie este important să urmărim modificarea densităţii inversiei de populaţie a celor două niveluri sub acţiunea unui câmp *em* extern a cărui frecvenţă se află în domeniul de frecvenţă al tranziţiei. Variaţia temporală a acestei densităţi va fi descrisă de ecuaţiile cinetice ale populării celor două niveluri în prezenţa câmpului *em*. Acesta va modifica densitatea inversiei de populaţie prin intermediul fenomenelor forţate posibile între cele două niveluri.

Ecuaţiile cinetice conţin informaţii relativ la variaţia temporală a densităţii de populaţie care determină mărimea răspunsului ansamblului de sisteme atomice la acţiunea câmpului *em*, dar nu conţin informaţii relativ la modificarea fazei câmpului *em* determinată de această interacţiune.

Să analizăm ecuaţiile cinetice pentru un ansamblu de sisteme atomice caracterizate numai prin două niveluri energetice supus acţiunii unui câmp de radiaţie optică. Analiza se va efectua considerând modelul de dipol electric oscilant ataşat tranziţiei. Energia internă a unui dipol oscilant reprezintă suma energiei cinetice şi potenţiale, iar densitatea de energie a ansamblului de dipoli reprezintă produsul dintre densitatea dipolilor şi energia internă a unui dipol la momentul considerat. Prin urmare:

$$\text{(5.1)}\qquad U(t)=\frac{1}{2}n_V m_e\left[\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)^2+\omega_0^2\,x(t)^2\right]=n_V U'(t),$$

unde $x(t)$ reprezintă elongaţia mişcării mediate pe toţi dipolii la momentul considerat. Variaţia în timp a densităţii energiei interne a ansamblului este:

$$\text{(5.2)}\qquad \frac{d\,U(t)}{dt}=n_V m_e\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)\left[\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}+\omega_0^2\,x(t)\right].$$

Considerând ecuaţia mişcării oscilatorii forţate a dipolului electric:

$$\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}+\gamma_0\frac{d\,x(t)}{dt}+\omega_0^2\,x(t)=-\frac{e}{m_e}e_x(t),$$

relaţia (5.2) devine:

$$\text{(5.3)}\qquad \frac{d\,U(t)}{dt}=-n_V e e_x\frac{d\,x(t)}{dt}-n_V m_e\,\gamma_0\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)^2.$$

Pentru un sistem oscilant energiile cinetice şi potenţiale mediate în timp sunt egale:

$$\left\langle\frac{1}{2}m_e\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)^2\right\rangle=\left\langle\frac{1}{2}m_e\,\omega_0^2\,x(t)^2\right\rangle=\frac{U'}{2},$$

prin urmare termenul mediat în timp din relaţia (5.3):

$$\left\langle n_V\,\gamma_0\,m_e\left(\frac{d\,x(t)}{dt}\right)^2\right\rangle=n_V\,\gamma_0\,U'=\gamma_0\,U,$$

reprezintă energia pierdută de către ansamblul de dipoli prin amortizare radiativă şi regăsită sub formă de energie radiată în mod spontan.

Termenul: $\left\langle n_V e e_x(t)\frac{d\,x(t)}{dt}\right\rangle$, care descrie schimbul de energie mediat în timp dintre ansamblul de dipoli electrici oscilanţi şi câmpul *em* armonic aplicat este (vezi I 4.15):

(5.4)

$$\left\langle n_V e e_x(t)\frac{d\,x(t)}{dt}\right\rangle=$$

$$=\frac{n_V e}{4}\left\langle\left[\tilde{E}_x(\omega)e^{i\omega t}+\tilde{E}_x^*(\omega)e^{-i\omega t}\right]\left[i\omega\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}-i\omega\tilde{X}^*(\omega)e^{-i\omega t}\right]\right\rangle=$$

$$=\frac{n_V e\,\omega}{4}\left\langle\frac{\tilde{E}_x(\omega)\tilde{X}(\omega)e^{i2\omega t}-\tilde{E}_x^*(\omega)\tilde{X}^*(\omega)e^{-i2\omega t}}{2i}\right\rangle-$$

$$-i\frac{n_V e\,\omega}{4}\left\langle\tilde{E}_x^*(\omega)\tilde{X}(\omega)-\tilde{E}_x(\omega)\tilde{X}^*(\omega)\right\rangle=$$

$$-i\frac{n_v e\omega}{4}\left[\frac{e}{m_e\gamma_0\omega}\frac{1}{1+\frac{2i(\omega-\omega_0)}{\gamma_0}}+i\frac{e}{m_e\gamma_0\omega}\frac{1}{1-\frac{2i(\omega-\omega_0)}{\gamma_0}}\right]\left|\widetilde{E}_x(\omega)\right|^2=$$

$$=\frac{n_v e^2}{2m_e\gamma_0}\frac{1}{1+\left[\frac{(\omega-\omega_0)}{\gamma_0/2}\right]^2}\left|\widetilde{E}_x(\omega)\right|^2$$

Primul termen din relaţia (5.4) reprezintă o componentă armonică la frecvenţa 2ω a cărei mediere în timp este egală cu zero. Transferul de energie descris de acest termen pendulează între câmpul *em* excitator şi sistemele de dipoli cu care interacţionează, prin urmare între cele două părţi nu există transfer mediu de energie. Al doilea termen descrie variaţia energiei interne a ansamblului determinată de interacţiunea dintre câmp şi dipol.

Evoluţia în timp a energiei interne a ansamblului de dipoli ca rezultat al acestei interacţiuni este descrisă de relaţia:

$$\text{(5.5)}\qquad \frac{dU(t)}{dt}=\frac{n_v e^2}{2m_e\Delta\omega_0}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2}\left|\widetilde{E}_x(\omega)\right|^2-\gamma_0 U(t).$$

Folosind relaţia (5.5), se poate obţine ecuaţia cinetică dacă se trece de la ansamblul de dipoli electrici oscilanţi la ansamblul de sisteme atomice cu două stări energetice cărora le-a fost ataşat dipolul. In acest scop, ca şi în prg. 1.2, se fac următoarele consideraţii:

- Deoarece s-a presupus că sistemul atomic are numai două niveluri energetice, se poate considera un nivel energetic de referinţă, dispus între cele două niveluri, astfel încât: $E_1=-\frac{\hbar\omega_{12}}{2}$ şi $E_2=+\frac{\hbar\omega_{12}}{2}$. Sistemele atomice fiind distribuite numai pe aceste niveluri, mărimea energiei internă a ansamblului va fi:

$$\text{(5.6)}\qquad \begin{aligned}U(t)&=n_1(t)E_1+n_2(t)E_2=\\&=[n_2(t)-n_1(t)]\frac{\hbar\omega_{12}}{2}=-\Delta n_{12}(t)\frac{\hbar\omega_{12}}{2},\end{aligned}$$

unde: $n_1(t)+n_2(t)=n_v$.

- In timp ce răspunsul ansamblului de dipoli este proporţional cu densitatea acestora, răspunsul ansamblului de sisteme atomice este proporţional cu:

$$n_1(t)-n_2(t)=\Delta n_{12}(t).$$

- Energia internă a ansamblului de dipoli se amortizează până la $U(t)=0$, în timp ce energia internă a ansamblului de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic faţă de mediul înconjurător, se amortizează până la valoarea de echilibru termodinamic U_0, dată de relaţia:

$$\text{(5.7)}\qquad U_0=[n_{02}-n_{01}(t)]\frac{\hbar\omega_{12}}{2}=-\Delta n_0\frac{\hbar\omega_{12}}{2},$$

unde n_{01} şi n_{02} reprezintă popularea cu sisteme atomice a celor două niveluri la echilibru termodinamic, determinată conform distribuţiei Boltzman. Termenul care descrie variaţia energiei interne $(\gamma_0 U)$ determinată de amortizare (emisia spontană) urmează să fie înlocuit prin: $\gamma_0(U-U_0)$.

Pe baza acestor consideraţii relaţia (5.5) devine:

$$\text{(5.8)}\qquad \frac{d[\Delta n_{12}(t)]}{dt}=-2W_{12}\,\Delta n_{12}(t)-\frac{\Delta n_{12}(t)-\Delta n_0}{T_1},$$

unde:

$$\text{(5.9)}\qquad W_{12}(\omega)=\frac{\pi e^2}{4m_e\hbar\omega_{12}}\frac{2}{\pi\Delta\omega_{12}}\frac{1}{1+\left[\frac{\omega-\omega_{12}}{\Delta\omega_{12}/2}\right]^2}\left|\widetilde{E}_x(\omega)\right|^2.$$

Conform relaţiei (I 6.3) se poate scrie: $\left|\widetilde{E}_x(\omega)\right|^2=\rho(\omega)/\varepsilon_0$ - unde: $\rho(\omega)$ reprezintă densitatea spectrală de energie, iar relaţia (5.9) devine:

$$\text{(5.10)}\qquad W_{12}(\omega)=\frac{\pi e^2}{4m_e\hbar\omega_{12}\varepsilon_0}g(\omega,\omega_{12})\rho(\omega)=B_{12}\,g(\omega,\omega_{12})\rho(\omega),$$

relaţie ce descrie dependenţa de frecvenţă a coeficientului Einstein pentru fenomene forţate, în cazul unei tranziţii de tip Lorentz.

5.1 Ecuaţiile cinetice pentru un ansamblu de sisteme atomice cu două niveluri energetice supus acţiunii unui câmp *em* armonic

Considerăm un ansamblu format din sisteme atomice cu două niveluri energetice (E_1 şi E_2), caracterizate prin factorii de degenerare g_1, respectiv g_2. Ansamblul interacţionează cu un semnal *em* armonic a cărui frecvenţă este cuplată cu frecvenţa tranziţiei. Sistemele atomice vor efectua tranziţia $1\Rightarrow 2$ cu rata totală $(W_{12}+w_{12})n_1(t)$, respectiv $2\Rightarrow 1$ cu rata totală $(W_{21}+w_{21})n_2(t)$ (fig. 30). Intre ratele tranziţiilor forţate există relaţia (IV 3.4), iar raportul ratelor de relaxare este dat de relaţia (2.8).

Sistemele atomice sunt repartizate pe cele două niveluri degenerate:

$$n_1(t)+n_2(t)=n_v,$$

iar diferenţa densităţii de populaţie va fi:

$$\Delta n(t)=\frac{g_2}{g_1}n_1(t)-n_2(t),$$

expresie ce va determina valoarea susceptibilităţii complexe, respectiv cea a câştigului.

In condiţiile echilibrului termodinamic, raportul populaţiilor este descris de factorul Boltzmann, iar diferenţa de populaţie, pe baza relaţiei (2.8), este dată de:

$$\Delta n_0=\frac{g_2}{g_1}n_{01}-n_{02}=n_v\frac{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}\right)}{1+\frac{g_1}{g_2}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}\right)}, \quad (5.11)$$

care, în cazul nivelurilor nedegenerate, devine:

$$\Delta n_0=\frac{w_{21}-w_{12}}{w_{21}+w_{12}}n_v=n_v \mathrm{th}\left(\frac{\hbar\omega_{12}}{2kT}\right). \quad (5.11')$$

Pentru a simplifica calculele considerăm nivelurile nedegenerate $(g_1=g_2=1)$. Evoluţia în timp a densităţii populaţiei celor două niveluri, dată de relaţii de tipul (3.1):

$$\frac{dn_1(t)}{dt}=-[W_{12}+w_{12}]n_1(t)+[W_{21}+w_{21}]n_2(t);$$

$$\frac{dn_2(t)}{dt}=-[W_{21}+w_{21}]n_2(t)+[W_{12}+w_{12}]n_1(t),$$

poate fi scrisă sub forma evoluţiei diferenţei de populaţie:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}=-2W_{12}\Delta n(t)-\left[\Delta n(t)-\frac{w_{21}-w_{12}}{w_{21}+w_{12}}n_v\right], \quad (5.12)$$

unde s-a considerat $W_{12}=W_{21}$ (niveluri nedegenerate). Dacă se notează: $w_{12}+w_{21}=\frac{1}{T_1}$ şi se foloseşte relaţia (5.11') atunci (5.12) (ansamblul de sisteme atomice în echilibru termic cu RCN, deci: $T_a=T_r$) devine:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}=-2W_{12}\Delta n(t)-\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1},$$

adică se ajunge la forma (5.8), obţinută pe baza principiului corespondenţei cu aspectele clasice. Termenul $\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1}$ descrie relaxarea diferenţei de populaţie $\Delta n(t)$, cu constanta de relaxare T_1, spre diferenţa de populaţie caracteristică echilibrului termodinamic. In cazul tranziţiilor optice $(\hbar\omega_{12}\rangle\rangle kT)$ se obţine:

$$w_{12}+w_{21}=\frac{1}{T_1}\cong\gamma_{21}=\frac{1}{\tau_{21}},$$

unde τ_{21} - timpul de viaţă al stării superioare.

Termenul $-2W_{12}\Delta n(t)$ descrie faptul că fenomenele forţate acţionează asupra diferenţei de populaţie $\Delta n(t)$ astfel încât valoarea acesteia tinde la zero. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *saturarea diferenţei de populaţie*, iar mărimea fenomenului este proporţională cu intensitatea componentei electrice a câmpului *em* aplicat (în cazul fenomenelor forţată, variaţia diferenţei de populaţie trebuie multiplicată cu factorul 2 deoarece prin emisie stimulată dispare un sistem atomic de pe nivelul superior, respectiv prin absorbţie un sistem atomic de pe nivelul inferior).

Dacă presupunem că, în prezenţa câmpului extern, s-a atins starea staţionară a diferenţei de populaţie, se poate scrie:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}=-2W_{12}\Delta n(t)-\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1}=0,$$

de unde rezultă expresia:

$$\Delta n(t)=\Delta n_{ss}=\frac{\Delta n_0}{1+2W_{12}T_1}, \quad (5.13)$$

reprezentată în fig. 65 b funcţie de mărimea $2W_{12}T_1$ (energia câmpului *em* extern).

5.2 Fenomenul de saturare a tranziţiei (a diferenţei de populaţie)

a) *Sisteme atomice cu două niveluri energetice.*

Pentru a analiza fenomenul de saturare a diferenţei de populaţie dintre două niveluri energetice se consideră ecuaţia cinetică (5.8). Presupunem că printr-un mijloc oarecare între cele două niveluri energetice s-a creat diferenţa de populaţie iniţială:

$$\Delta n_{12}(0)=n_1(0)-n_2(0),$$

a cărei valoare este diferită de diferenţa de populaţie la echilibru termodinamic.

Dacă ansamblul nu interacţionează cu câmpul *em*, atunci $W_{12} = 0$, iar diferenţa de populaţie $\Delta n_{12}(0)$ se relaxează spre valoarea Δn_0 numai prin emisie spontană caracterizată prin constanta de relaxare T_1. Relaţia (5.8) devine:

$$\frac{d[\Delta n_{12}(t)]}{dt} = -\frac{\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0}{T_1}, \text{ sau:}$$

$$\frac{d[\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0]}{\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0\, dt} = -\frac{1}{T_1} dt,$$

de unde:

(5.14) $$\Delta n_{12}(t) = \Delta n_0 + [\Delta n_{12}(0) - \Delta n_0] e^{-t/T_1}.$$

Diferenţa de populaţie iniţială, după un interval de timp, se relaxează spre valoarea de echilibru termodinamic după o lege exponenţială.

Dacă la momentul $t = 0$ ansamblului considerat i se aplică un câmp *em*, atunci $W_{12} \neq 0$, iar variaţia în timp a diferenţei de populaţie este dată de relaţia (5.8), care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d[\Delta n_{12}(t)]}{dt} = -\Delta n_{12}(t)\frac{2W_{12}T_1 + 1}{T_1} + \frac{\Delta n_0}{2W_{12}T_1 + 1}\frac{2W_{12}T_1 + 1}{T_1} =$$

$$= -[\Delta n_{12}(t) - \Delta n_{12,sat}]\frac{2W_{12}T_1 + 1}{T_1}$$

unde: $\Delta n_{12,sat} = \dfrac{\Delta n_0}{2W_{12}T_1 + 1}$.

Valoarea densităţii de populaţie, după un interval de timp t, este dată de relaţia:

(5.15) $$\Delta n_{12}(t) = \Delta n_{12,sat} + [\Delta n_{12}(0) - \Delta n_{12,sat}] e^{-\left(2W_{12} + \frac{1}{T_1}\right)t}$$

Prin urmare sub acţiunea câmpului *em*, diferenţa de populaţie se relaxează spre diferenţa de populaţie staţionară: $\Delta n_{12,sat} \langle \Delta n_0$, iar viteza de relaxare este caracterizată prin timpul de relaxare:

(5.16) $$T = \frac{T_1}{2W_{12}T_1 + 1} \langle T_1.$$

Cu cât este mai intens câmpul *em* aplicat cu atât mai repede se tinde spre starea saturată corespunzătoare.

Dacă se notează: $W_{sat} = \dfrac{1}{2T_1}$, atunci relaţia (5.13) devine:

(5.17) $$\frac{\Delta n_{ss}}{\Delta n_0} = \frac{1}{1 + \frac{W_{12}}{W_{sat}}} = \frac{1}{1 + ct \times \text{puterea semnalului}},$$

unde W_{sat} reprezintă probabilitatea tranziţiilor forţate pentru care diferenţa de populaţie devine egală cu jumătate din valoarea iniţială (în prezenţa semnalului slab). Această expresie a diferenţei de populaţie descrie saturarea omogenă a diferenţei de populaţie în cazul tranziţiilor între cele două niveluri.

Reprezentarea grafică a variaţiei temporale a diferenţei de populaţie pentru diferite valori ale intensităţii câmpului *em* aplicat este dată în fig. 65 a. Pentru valori mari ale intensităţii câmpului *em* probabilitatea fenomenului de emisie stimulată devine mare astfel încât: $W_{12} \rangle\rangle \dfrac{1}{T_1}$, iar diferenţa densităţii de populaţie corespunzătoare regimului de saturaţie tinde la zero $(\Delta n_{12,sat} \to 0)$.

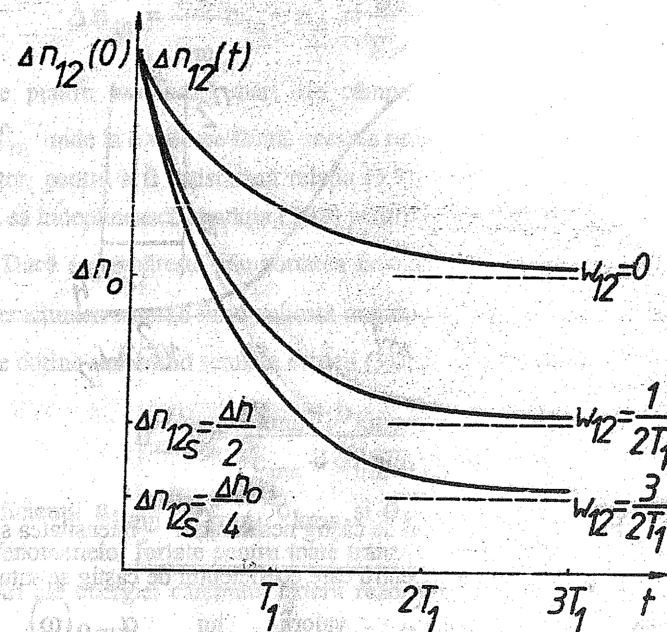


Fig. 65 a

Saturarea diferenţei de populaţie a două niveluri energetice sub acţiunea unui câmp *em* extern este un fenomen foarte important în funcţionarea dispozitivelor laser. Acesta determină saturarea coeficientului de atenuare (a_m) la propagarea fasciculului de radiaţie optică prin mediul material sau a coeficientului de câştig $\alpha_m(\omega)$ al mediului activ la propagarea prin acesta a aceluiaşi fascicul.

Saturarea coeficientului de câştig poate fi descrisă de o relaţie asemănătoare cu (5.17), de forma:

$$\alpha_m(\omega)=\alpha_{0m}\frac{1}{1+I/I_{sat}}=\frac{1}{1+\text{ct}\times\text{puterea semnalului}}, \tag{5.18}$$

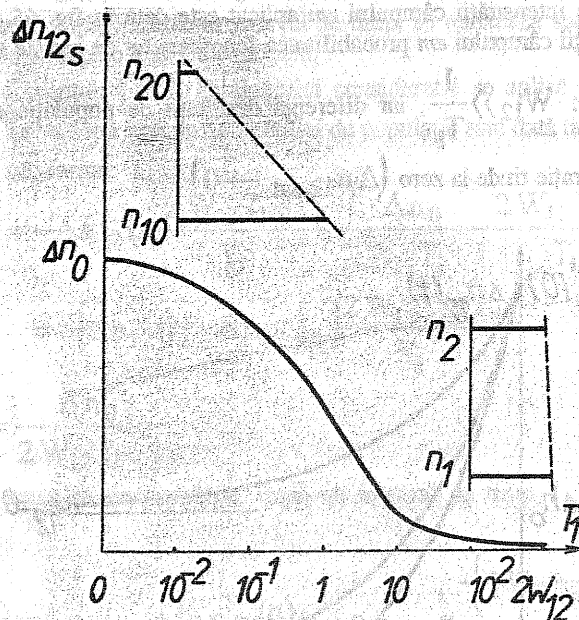


Fig. 65 b

unde $\alpha_{m0}(\omega)$ reprezintă coeficientul de câştig nesaturat, I - intensitatea semnalului extern aplicat, iar I_{sat} - intensitatea pentru care coeficientul de câştig se saturează la o valoare egală cu jumătatea valorii lui $\alpha_{m0}(\omega)$ (pentru $I=I_{sat}\rightarrow\alpha_m(\omega)=\alpha_{m0}(\omega)/2$).

In tehnica laserilor uneori se utilizează materiale alese astfel încât să se comporte asemănător cu un absorbant saturabil (de ex. în cazul modulării factorului de calitate (factorul-Q) al cavităţii rezonante, blocarea modurilor de oscilaţie sau izolarea optică pentru a preîntâmpina "scurgerea" semnalului obţinut între două niveluri energetice). De asemenea saturarea diferenţei inversiei de populaţie are loc în oscilatorul laser şi determină puterea laser la ieşirea dispozitivului.

b) *Sisteme atomice multinivel*

In cazul unui ansamblu de sisteme atomice *multi*nivel asupra căruia acţionează un câmp *em* constituit din mai multe armonici la rezonanţă cu unele tranziţii ale sistemului atomic, densitatea de inversie de populaţie iniţială, precum şi densitatea de inversie la saturaţie va depinde de ratele de relaxarea pe celelalte niveluri precum şi de interacţiunile suplimentare.

Relaţia (3.3), care descrie legătura dintre densitatea de populaţie a diferitelor niveluri în regim staţionar, poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{dn_m}{dt}=-W_{mn}n_m+W_{nm}n_n+f_m(n_i,W_{mi},w_{mi})=0,$$

unde s-a evidenţiat numai interacţiunea sistemului atomic cu câmpul *em* armonic (ω_{mn}), funcţia f_m cuprinzând ceilalţi termeni ai relaţiei, sau sub forma:

$$\Delta n_m=\frac{g_n}{g_m}n_m-n_n=\frac{g_n}{g_m}\frac{f_m(n_i,W_{mi},w_{mi})}{W_{mn}}. \tag{5.19}$$

Deoarece pentru intensităţi mari ale câmpului extern perturbator $(W_{mn}\rightarrow\infty)$ funcţia f_m tinde la o valoare finită, aceasta nedepinzând de valoarea energiei câmpului perturbator, pentru a fi satisfăcută relaţia (3.3), este necesar ca diferenţa de populaţie Δn_{mn} să îndeplinească condiţia (5.19) pentru orice valoare a energiei câmpului.

Dacă se urmăreşte comportarea la saturaţie a populaţiei $n_{ss,k}$ a unui nivel E_k, interacţiunea externă fiind aplicată tranziţiei $m\Leftrightarrow n$, atunci valoarea populaţiei $n_{ss,k}$ se obţine rezolvând setul de ecuaţii (3.3) şi va fi de forma:

$$n_{ss,k}=\frac{a_{kmn}+b_{kmn}W_{mn}}{c_{mn}+d_{mn}W_{mn}}\rightarrow\frac{b_{kmn}}{d_{mn}},$$

unde coeficienţii a_{kmn}, b_{kmn}, c_{kmn} şi d_{kmn} conţin probabilităţile de relaxare şi cele ale fenomenelor forţate pentru toate tranziţiile diferite de $m\Leftrightarrow n$. Pentru valori foarte mari ale energiei câmpului extern rezonant (ω_{mn}) populaţia de saturaţie ale fiecărui nivel k tinde la valoarea $\frac{b_{kmn}}{d_{mn}}$.

In cazul particular al tranziţiei $m\Leftrightarrow n$ se poate scrie:

$$n_{ss,m} = \frac{a_{mmn}+b_{mmn}}{c_{mn}+d_{mn}W_{mn}}, \quad n_{ss,n} = \frac{a_{nmn}+b_{nmn}}{c_{mn}+d_{mn}W_{mn}},$$

de unde:

$$\Delta n_{ss,mn} = \frac{g_n}{g_m} n_m - n_n =$$

$$= \frac{\frac{1}{c_{mn}}\left(\frac{g_n}{g_m}a_{mmn-} - a_{nmn}\right) + \frac{1}{c_{mn}}\left(\frac{g_n}{g_m}b_{mmn}W_{mn} - b_{nmn}W_{mn}\right)}{1+\frac{d_{mn}}{c_{mn}}W_{mn}},$$

care, pentru valori mari ale câmpului extern, tinde la:

$$\frac{\frac{1}{c_{mn}}\left(\frac{g_n}{g_m}a_{mmn-} - a_{nmn}\right)}{1+\frac{d_{mn}}{c_{mn}}W_{mn}} = \frac{\Delta n_{0,mn}}{1+\frac{d_{mn}}{c_{mn}}W_{mn}} = \frac{\Delta n_{0,mn}}{1+\frac{W_{mn}}{W_{sat,mn}}},$$

asemănătoare cu relația (5.17), unde $W_{mn,sat}$ reprezintă probabilitatea tranzițiilor forțate pentru care diferența de populație devine egală cu jumătatea diferenței populației în cazul semnalului slab, corespunzătoare condițiilor considerate. Prin urmare în cazul sistemului atomic *multi*nivel, ca și în cazul sistemului atomic cu două niveluri energetice, saturarea diferenței de populație se realizează conform aceleași legi.

c) *Răspunsul tranzitoriu al sistemelor atomice multinivel*

Răspunsul tranzitoriu al unui ansamblu de sisteme atomice cu două niveluri cu distribuție a populației diferită de cea la echilibru termodinamic, în lipsa câmpului *em* perturbator rezonant extern este descris de relația (5.14), iar în prezența acestuia de relația (5.15).

In cazul ansablului de sisteme atomice *multi*nivel, răspunsul este descris de soluția setului de $(M-1)$ ecuații diferențiale liniare cuplate. Evoluția tranzitorie va fi descrisă fie de o soluție oscilatorie, fie de o amortizare exponențială. In cazul amortizării exponențiale vor apare $(M-1)$ constante de timp reprezentate de o combinație liniară a mărimilor W_{mi} și w_{mi}. Practic în majoritatea sistemelor *multi*nivel vor exista câteva rate de amortizare dominante care vor descrie evoluția populației nivelelor energetice.

Dacă este îndeplinită condiția de "aproximație a frecvenței optice" ($\hbar\omega/kT$), atunci se poate neglija probabilitatea de relaxare spre "în sus" (w_{mi}), evoluția în timp a populației nivelului energetic m fiind descrisă de ecuația:

(5.20)
$$\frac{dn_m}{dt} = -\sum_{i\langle m}\gamma_{mi}\, n_m(t) + \sum_{i\rangle m}\gamma_{im}\, n_i(t),$$

unde prima sumă, care reprezintă contribuția principală, descrie relaxarea populației nivelului m spre toate nivelurile inferioare, iar a doua sumă relaxarea populației nivelurilor superioare spre nivelul m. Dacă se consideră numai contribuția principală se obține:

(5.20')
$$\frac{dn_m}{dt} = -\sum_{i\langle m}\gamma_{mi}\, n_m(t) = \gamma_m\, n_m(t)$$

unde:
$$\gamma_m = \frac{1}{\tau_m} = \frac{dn_m}{dt} = -\sum_{i\langle m}\gamma_{mi},$$

conține atât amortizările radiative cât și pe cele neradiative.

Din (5.20') rezultă:

(5.21)
$$n_m(t) = n_m(t_0)\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_m}\right),$$

relație prezentată în (IV 4.10).

6. Susceptibilitatea electrică a ansamblului de sisteme atomice.

Pe baza considerațiilor prezentate în prg. 5 relativ la trecerea de la ansamblul de dipoli electrici oscilanți atașați unei tranziții $n \Leftrightarrow m$ la ansamblul de sisteme atomice, se poate atașa tranziției date mărimea fizică - *susceptibilitate electrică* - a cărei valoare depinde de diferența populației celor două niveluri implicate în proces, expresia ei, conform relației (III 2.3), fiind de forma:

(6.1)
$$\tilde{\chi}_{nm}(\omega) = -\frac{(n_m - n_n)e^2 f_{mn}}{m_e\,\varepsilon_0\omega_{mn}\Delta\omega_{mn}}\left[\frac{\frac{\omega-\omega_{mn}}{\Delta\omega_{mn}/2}}{1+\left(\frac{\omega-\omega_{mn}}{\Delta\omega_{mn}/2}\right)^2} + i\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_{mn}}{\Delta\omega_{mn}/2}\right)^2}\right]$$

(Deoarece expresia susceptibilității electrice a ansamblului de dipoli (III 3.1) conține factorul $\frac{e^2}{m_e}$, expresia susceptibilității corespunzătoare ansamblului de sisteme

atomice capabile să participe la tranziție, trebuie să conțină factorul f_{mn} - tăria oscilatorului corespunzător tranziției).

Din punct de vedere cuantic valoarea susceptibilității electrice corespunzătoare tranziției $n \Leftrightarrow m$, depinde de frecvența de bază și lățimea spectrală a tranziției, caracteristicile cuantice ale stării inițiale și finale ale tranziției (f_{mn}), precum și de densitatea diferenței populației a celor două niveluri.

- Dacă ansamblul de sisteme atomice se află în echilibru termodinamic, atunci $n_n > n_m$, iar valoarea susceptibilității electrice (χ_{mn}) depinde numai de temperatură.
- Dacă se acționează în mod selectiv asupra ansamblului de sisteme atomice, atunci se modifică densitatea diferenței populației celor două niveluri și corespunzător valoarea susceptibilității electrice, aceasta putând chiar să-și modifice semnul.
- De asemenea dacă se realizează o densitate dată a diferenței populației și se acționează cu un câmp de radiație a cărui frecvență se află în domeniul spectral al tranziției, acesta, prin intermediul fenomenelor forțate de absorbție și emisie stimulată, modifică densitatea diferenței populației și corespunzător valoarea susceptibilității tranziției.

Valoarea susceptibilității, prin intermediul lățimii spectrale a tranziției, depinde de mecanismele de lățire a tranziției care acționează între componentele ansamblului.

Din relația (6.1) rezultă că atât mărimea $\chi'(\omega)$ cât și $\chi''(\omega)$ depind de diferența densităților populației celor două niveluri.

7. Tranziții spectrale lățite omogen și neomogen

Răspunsul ansamblului de sisteme atomice la acțiunea unui fascicul intens de radiație optică a cărui frecvență se află în domeniul spectral al tranziției și a cărui lățime spectrală este mult mai mică față de lățimea radiativă a tranziției depinde de mecanismele care determină lățirea tranziției. Din acest punct de vedere mecanismele de lărgire se divid în două clase: *mecanisme de lărgire omogenă* (respectiv *linie* sau *tranziție lățită omogen*) și mecanisme de *lărgire neomogenă* (*linie* sau *tranziție lățită neomogen*). Deosebirea dintre cele două tipuri de lărgire se manifestă în modul de participare a sistemelor atomice ale ansamblului la interacțiunea cu fasciculul considerat mai sus.

7.1 Tranziții spectrale lățite omogen

Un mecanism de lărgire este *omogen* dacă determină lărgirea aproximativ identică a tranziției fiecărui sistem atomic. Mecanismul de lărgire nu acționează asupra valorii frecvenței de bază a tranziției, iar mărimea lărgirii variază de la sistem la sistem conform legii căreia i se supune probabilitatea procesului, însă fără a se modifica funcția spectrală a tranziției. Prin urmare toate sistemele atomice ale ansamblului prezintă răspunsuri identice la acțiunea semnalului extern. Mărimea răspunsului individual depinde de mărimea diferenței dintre frecvența de rezonanță a sistemului atomic și frecvența semnalului aplicat. După cum s-a subliniat în prg. II 2 mărimea răspunsului

ansamblului în acest caz reprezintă mărimea răspunsului individual multiplicat cu densitatea diferenței populației celor două niveluri implicate în tranziție.

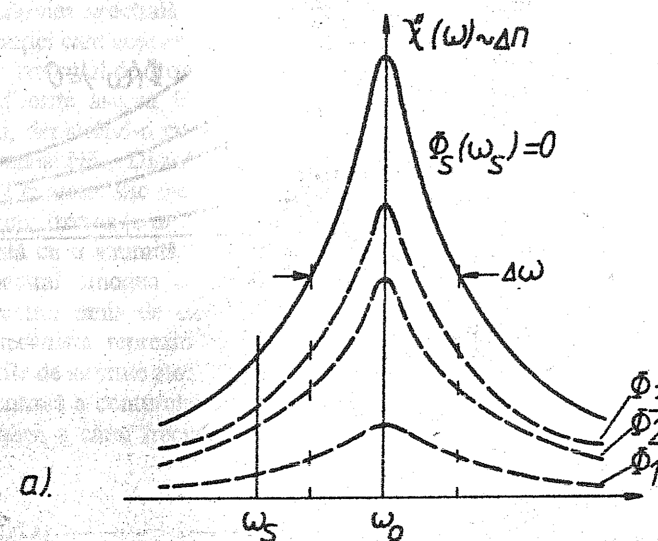


Fig. 66 a

Pentru a ilustra răspunsul ansamblului de sisteme atomice la acțiunea fasciculului considerat să ne imaginăm următoarea experiență. Valoarea componentelor susceptibilității $\chi'(\omega)$ respectiv $\chi''(\omega)$ poate fi măsurată funcție de frecvență folosind un fascicul de testare de intensitate mică și bandă spectrală îngustă a cărui frecvență poate fi variată de-a lungul domeniului spectral al tranziției. Să considerăm că asupra ansamblului de sisteme atomice acționează un fascicul de intensitate mare dar variabilă, caracterizat printr-un domeniu spectral foarte îngust. Frecvența acestui fascicul (ω_s) este cuprinsă în domeniul spectral al tranziției.

Deoarece tranziția este lățită omogen, acest fascicul interacționează în mod identic cu toate sistemele atomice ale ansamblului. Prin fenomenele forțate, funcție de intensitate, el tinde să satureze diferența densității populațiilor celor două niveluri, adică acționează asupra valorii Δn, pentru valori mari ale intensității făcând-o să tindă la zero, însă fără a modifica lățimea spectrală $(\Delta\omega)$ a tranziției. Odată cu modificarea mărimii Δn se modifică și valoarea mărimii $\chi''(\omega)$, respectiv $\chi'(\omega)$. In fig. 66 a este reprezentată valoarea mărimii $\chi''(\omega)$ pentru diferite valori ale fluxului spectral (Φ), iar în fig. 66 b aceeași dependență în cazul mărimii $\chi'(\omega)$.

Dependența variației diferenței densității de populație de intensitatea semnalului extern intens este descrisă foarte bine de relația:

(7.1) $$\Delta n = \Delta n_0 \frac{1}{1 + ct. \times W_{mn}(\omega_s)},$$

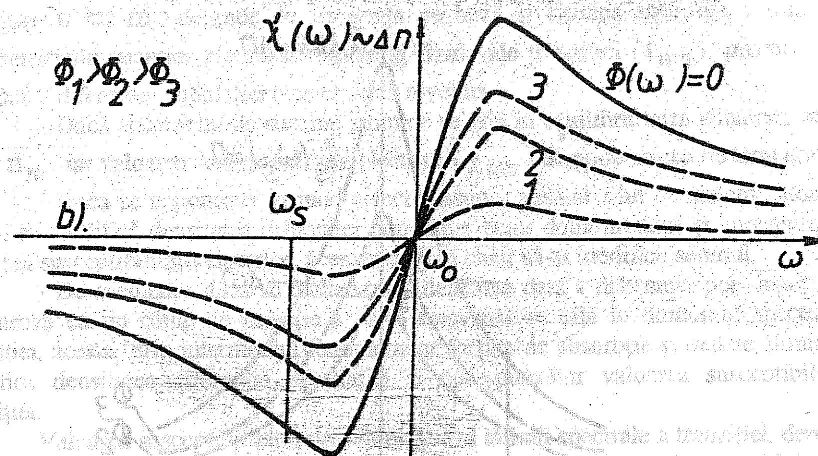


Fig. 66 b

unde Δn_0 reprezintă densitatea diferenței de populație în lipsa semnalului extern, iar $W_{mn}(\omega_s)$ - probabilitatea fenomenelor forțate, care depinde de forma conturului spectral al tranziției. In cazul tranzițiilor lățite omogen, conturul spectral al tranziției, în majoritatea cazurilor, este de tip Lorentz, deci:

(7.2) $$W_s(\omega_s) \propto \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_s - \omega_0}{\Delta\omega/2}\right)}.$$

Pentru o putere dată a semnalului de interacțiune, rata saturării tranziției depinde de cuplajul dintre frecvența semnalului și cea de rezonanță a sistemului atomic; rata procesului de interacțiune este maximă la rezonanță $(\omega_0 = \omega_s)$ și scade pe măsură ce crește diferența celor două frecvențe. Dacă semnalul de interacțiune este foarte intens, este posibilă saturarea tranziției chiar pentru un decuplaj mare al celor două frecvențe.

Pentru a caracteriza o tranziție lățită omogen este necesar să se cunoască conturul spectral al tranziției (lățimea spectrală a acestuia) și densitatea diferenței de populație a celor două niveluri (Δn).

7.2 Tranziții spectrale lățite neomogen.

Considerăm un ansamblu de sisteme atomice identice, deci fiecare sistem este caracterizat prin aceeași frecvență de rezonanță și același contur spectral al răspunsului la acțiunea unui semnal exterior a cărui frecvență se află în domeniul de rezonanță al tranziției. Lățimea spectrală a conturului este determinată de mecanismele omogene de lățire a tranziției care acționează asupra ansamblului.

Mecanismul de lărgire a tranziției spectrale este neomogen dacă acționează cu intensități diferite asupra frecvenței de rezonanță a diferitelor sisteme atomice ale ansamblului, deplasând-o cu valori diferite față de frecvența de rezonanță, funcție de valoarea intensității. Distribuția valorii intensității acțiunii funcție de valoarea parametrului caracteristic mecanismului este descrisă de o anumită lege. Ca rezultat al acestei acțiuni, frecvența de rezonanță a unui grup de sisteme atomice ale ansamblului este deplasată cu o anumită valoare. Odată cu frecvența de rezonanță este deplasat și conturul spectral omogen caracteristic tranziției considerate. Conform prg. III 3.1, conturul spectral emis de către ansamblul de sisteme atomice supus acțiunii unui asemenea mecanism, reprezintă înfășurătoarea contururilor spectrale deplasate emise de către grupurile de sisteme atomice supuse acțiunii mecanismului considerat. In acest caz frecvența centrală a conturului spectral înregistrat al tranziției corespunde grupului de sisteme atomice a cărui frecvență de rezonanță nu este supusă acțiunii mecanismului (fig. 68 a).

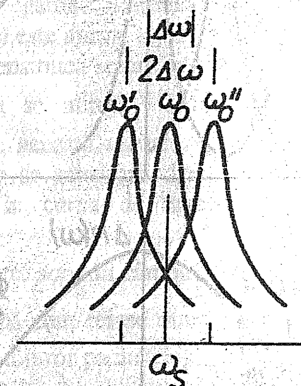


Fig. 67

Să analizăm răspunsul ansamblului considerat mai sus la acțiunea unui semnal optic extern de intensitate mare și lățime spectrală foarte mică, a cărui frecvență (ω_s) este cuprinsă în domeniul spectral al tranziției. Conturul spectral al răspunsului $[\chi'(\omega), \chi''(\omega)]$ se înregistrează cu ajutorul unui fascicul de radiție optică de intensitate mică și lățime spectrală mică $(\Delta\omega \langle\langle \Delta\omega_{neomo.})$, dar a cărui frecvență

poate fi variată în mod continuu în domeniul spectral al interacţiunii. După cum s-a subliniat în prg. III 3.2, semnalul extern (ω_S) aplicat interacţionează, prin intermediul fenomenelor forţate, numai cu sistemele atomice ale căror contururi spectrale omogene se suprapun peste frecvenţa acestuia. Pentru o intensitate dată a semnalului extern, cuplajul maxim se realizează pentru sistemele atomice a căror frecvenţă de rezonanţă coincide cu frecvenţa semnalului. Cuplajul este mai mic cu cât frecvenţa de rezonanţă este mai deplasată spre frecvenţe mai mari sau mai mici faţă de frecvenţa semnalului extern. Convenţional se consideră că participă la interacţiune, cu cuplaje diferite, toate sistemele atomice a căror frecvenţă de rezonanţă se află într-un domeniu spectral egal cu două lăţimi spectrale omogene, centrat pe frecvenţa semnalului (fig. 67). Acest subansamblu de sisteme atomice este cunoscut sub denumirea de *pachet spectral*. Noţiunea este asemănătoare cu cea de pachet de spin, introdusă în domeniul rezonanţei magnetice, pentru a caracteriza interacţiunea magnetică a spinilor electronilor cu câmpul magnetic neomogen.

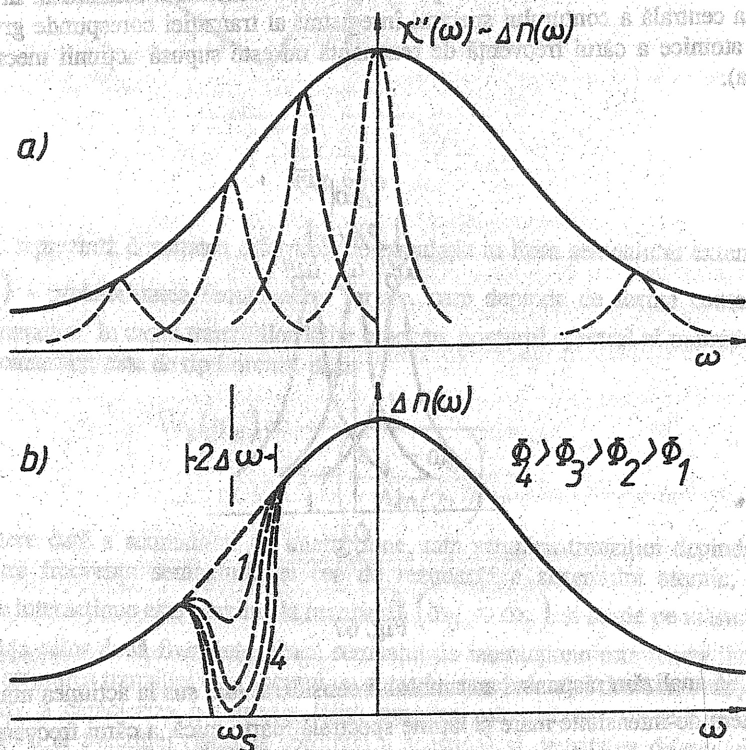


Fig. 68 a,b

Prin urmare câmpul extern aplicat, chiar la intensităţi foarte mari, poate interacţiona numai cu sistemele atomice ce aparţin pachetului spectral centrat pe frecvenţa câmpului. Pentru a descrie interacţiunea câmpului extern cu ansamblul de sisteme atomice supus acţiunii unui mecanism neomogen de lăţire a tranziţiei este necesar să se considere atât mecanismele omogene de lăţire, cât şi cele neomogene. Mecanismele omogene aproape totdeauna conduc la o formă de tip Lorentz a conturului, în timp ce cele neomogene, dacă deplasarea frecvenţei este aleatoare fiind descrisă de o distribuţie gaussiană, conduc la o formă de tip Gauss. Se poate aprecia numărul de pachete spectrale independente ale ansamblului divizând lăţimea spectrală neomogenă la dublul lăţimii spectrale omogene.

Să analizăm răspunsul $\chi''(\omega)$ al ansamblului la acţiunea semnalului extern considerat. Presupunem că densitatea spectrală de flux a acestuia este constantă. Deoarece la interacţiune participă numai sistemele atomice ale pachetului spectral, se va micşora numai contribuţia diferenţei densităţii de populaţie corespunzătoare acestui pachet. Corespunzător valoarea înfăşurătorii răspunsului $\chi''(\omega)$ ale pachetelor spectrale ale ansamblului se va micşora numai în domeniul spectral al pachetului considerat (fig. 68 b). Saturarea maximă va corespunde sistemelor atomice a căror frecvenţă coincide cu frecvenţa semnalului, pentru celelalte $(\omega_S \neq \omega_0)$ saturarea va fi mai slabă (cuplajul câmp-sistem atomic este slab). În acest mod în profilul înfăşurătorii $\chi''(\omega)$ (profilul distribuţiei după frecvenţe a densităţii diferenţei de populaţie) se perforeaza o "gaura". Lăţimea spectrală a acestei găuri (măsurată la jumătatea valorii ei maxime) este aprox. egală cu dublul lăţimii omogene. Ea devine cu atât mai profundă cu cât intensitatea semnalului este mai mare. Pentru o valoare mare a intensităţii este posibil să se atingă valoare $\chi''(\omega_S = \omega_0) = 0$. La creşterea intensităţii semnalului peste această valoare "gaura" se lăţeşte foarte încet, deoarece sistemele atomice adiacente se saturează din ce în ce mai greu. Acest fenomen de perforare a unei "găuri" în curba de distribuţie a populaţiei a fost evidenţiat experimental.

Să analizăm rezultatul acţiunii câmpului extern (ω_S) asupra părţii reactive a susceptibilităţii $\chi'(\omega)$. După cum reiese din prg. III 3.2, mărimea $\chi'(\omega)$ reprezintă înfăşurătoarea contribuţiilor tuturor pachetelor spectrale la acestă mărime. La frecvenţa centrală, valoarea mărimii $\chi'(\omega)$ este egală cu zero deoarece contribuţia sistemelor atomice a căror frecvenţă de rezonanţă este centrată pe frecvenţa centrală este egală cu zero, iar contribuţia, la această frecvenţă a sistemelor atomice a căror frecvenţă de rezonanţă este dispusă simetric faţă de frecvenţa centrală sunt egale şi de semn contrar. Pentru frecvenţe depărtate de frecvenţa centrală, valoarea lui $\chi'(\omega)$ este determinată de contribuţia pachetelor spectrale centrate pe frecvenţa considerată. De asemenea trebuie reamintit faptul că domeniul spectral pe care valoarea mărimii $\chi'(\omega)$ nu poate fi neglijată este aprox. egal cu 6 lăţimi spectrale ale mărimii $\chi''(\omega)$.

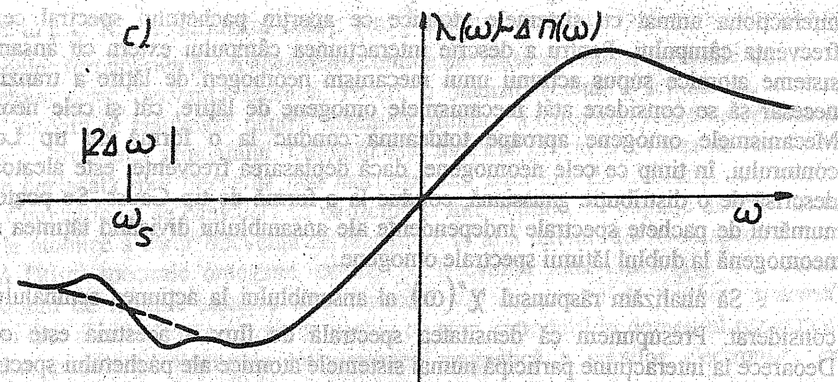


Fig. 68 c

Dacă frecvenţa semnalului extern coincide cu frecvenţa centrală $(\omega_s = \omega_0)$, atunci se saturează pachetul spectral central, dar, conform celor prezentate mai sus, valoarea $\chi'(\omega_s = \omega_0)$ nu se poate modifica. Dacă $\omega_s \rangle \omega_0$ sau $\omega_s \langle \omega_0$, saturarea pachetului spectral centrat pe frecvenţa considerată, modifică valoarea mărimii $\chi'(\omega_s)$. Saturarea pachetului spectral considerat, micşorează valoarea densităţii diferenţei de populaţie a celor două niveluri ale tranziţiei, conform relaţiei (7.1), prin urmare din valoarea corespunzătoare a înfăşurătorii $\chi'(\omega)$ trebuie extrasă contribuţia numărului de sisteme atomice cu care s-a micşorat diferenţa de populaţie (fig. 68 c).

Pentru a caracteriza o tranziţie lăţită neomogen este necesar să se cunoască lăţimea neomogenă a conturului spectral al tranziţiei, lăţimea omogenă caracteristică sistemelor atomice ale ansamblului, numărul de pachete spectrale, precum şi densitatea diferenţei de populaţie $\Delta n(\omega_s)$ corespunzătoare fiecărui pachet spectral.

Dacă lăţimea tranziţie neomogene este mult mai mare faţă de cea a tranziţiei omogene, atunci vor exista mai multe pachete spectrale şi se vor putea perfora mai multe găuri care nu vor interacţiona între ele. Acesta este de ex. cazul laserului cu $He-Ne$, unde predomină lărgirea determinată de efectul Doppler.

Dacă deplasarea frecvenţei de rezonanţă datorită mecanismelor neomogene este mică, atunci se păstrează caracterul de tranziţie omogenă, iar un semnal aplicat la orice frecvenţă cuprinsă în domeniul spectral al conturului saturează toate sistemele atomice şi nu se perforează nici o gaură. Acesta este de ex. cazul laserilor în care atomii activi dopează o matrice reprezentată de reţeaua cristalină a unui compus convenabil. Intre aceste două cazuri extreme apar cazuri intermediare în care se manifestă 1-2 pachete spectrale. De ex. este cazul laserului cu CO_2.

Din cele prezentate rezultă că lărgirea spectrală a tranziţiei este determinată de acţiunea simultană a câtorva mecanisme. Conturul spectral rezultant va fi determinat de convoluţia funcţiilor ce descriu contururile corespunzătoare mecanismelor implicate:

$$g(\omega) = g_1(\omega) \otimes g_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\omega') g_2(\omega - \omega') d\omega'.$$

Dacă acţionează două mecanisme de tip Lorentz caracterizate prin lăţimele spectrale $\Delta\omega_1$ şi $\Delta\omega_2$, conturul spectral rezultant va fi tot de tip Lorentz:

$$g_{L_1}(\omega, \Delta\omega_1) \otimes g_{L_2}(\omega, \Delta\omega_2) = g_L(\omega, \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2),$$

cu lăţimea spectrală:

$$\Delta\omega_L = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2.$$

Aceasta este echivalent cu faptul că în cazul lărgirilor omogene, timpul de viaţă al nivelului este determinat de:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \cdots.$$

Convoluţia a două contururi de tip Gauss cu lăţimile $\Delta\omega_1$ şi $\Delta\omega_2$, conduce tot la un contur de tip Gauss:

$$g_{G_1}(\omega, \Delta\omega_1) \otimes g_{G_2}(\omega, \Delta\omega_2) = g_G\left(\omega, \sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}\right),$$

cu lăţimea spectrală:

$$\Delta\omega_G = \sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}.$$

Dacă lăţirea omogenă şi cea neomogenă sunt de acelaşi ordin de mărime, atunci problema determinării formei conturului se reduce la calcularea convoluţiei funcţiilor Lorentz şi Gauss, adică se obţin integralele Voigt. In acest mod se poate stabili conturul tranziţiei spectrale $g(\omega)$ ceea ce permite stabilirea dependenţei de frecvenţă a coeficienţilor Einstein.

8. Mecanisme de lăţire a tranziţiilor spectrale care acţionează într-o matrice-cristalină

8.1 Lăţire dipolară

Acest mecanism de lăţire a tranziţiei spectrale a unui sistem atomic (dipol electric) care aparţine unui ansamblu ce dopează o reţea cristalină, este rezultatul cuplajului dintre sistemele atomice vecine de acelaşi tip. Sistemele atomice de acelaşi tip sunt cuplate între ele datorită acoperirii reciproce a câmpurilor electrice şi magnetice proprii. Pentru a se realiza suprapunerea acestor câmpuri este necesară o densitate suficient de mare a sistemelor de dopaj.

Un sistem atomic al ansamblului, dintr-o cauză oarecare, poate fi perturbat aleator. Aceasta va determina o perturbare aleatoare a câmpului propriu care, prin cuplajul amintit mai sus, va influența frecvența tranziției sistemului atomic cu care este cuplat. In acest mod frecvența de rezonanță, respectiv conturul tranziției, va prezenta o variație aleatoare în timp. Acest mecanism conduce la o defazare efectivă a câmpului secundar emis de către dipolul (sistem atomic) considerat, asemănătoare cu defazarea obținută ca rezultat al ciocnirilor dintr-un ansamblu sub formă de gaz. De aceea tratarea matematică, în cele două cazuri, este asemănatoare.

Deoarece lățirea dipolară este determinată de cuplajul dintre sistemele atomice de același tip, perturbarea unui sistem se transmite și celorlalte sisteme. Din acestă cauză mecanismul este de tip *omogen*.

In cazul materialelor laser solide mecanismul nu prezintă o contribuție deosebită la lățirea tranzițiilor spectrale deoarece pentru concentrațiile de dopaj realizate in mod obişnuit distanța dintre sistemele atomice de acelaşi tip este suficient de mare. In cazul materialelor laser cu concentrații mari de dopaj, răcite la temperatura He-lichid, când lățirea fononică devine neglijabilă, se înregistrează lățiri dipolare de câțiva kHz.

8.2 Lățire determinată de neomogeneitățile aleatoare ale rețelei cristaline.

La concentrații mari de dopaj cu sisteme atomice active pot apare tensiuni mecanice în rețeua cristalină (din cauza dimensiunilor diferite ale sistemelor atomice de dopaj față de sistemele atomice de bază ale rețelei) sau neomogeneități ale distribuției acestora în rețea. Acestea determină modificări ale câmpului electric local care conduc la perturbarea, respectiv la deplasarea nivelurilor energetice ale sistemului atomic. De ex. proprietățile stărilor energetice ale ionului de Cr^{3+} inclus în rețeua cristalină Al_2O_3 sunt complet diferite de cele ale ionului liber. Modificările locale ale rețelei cristaline determină *deplasări statice* ale nivelurilor energetice, respectiv modificări aleatoare ale frecvenței tranziției unui sistem atomic față de altul. Variații aleatoare de acest gen pot fi de asemenea determinate de dislocații, atomi străini interstițiali, atomi lipsă și alte defecte localizate în rețeua cristalină-matrice.

Variația frecvenței tranziției determinată de aceste defecte aleatoare, la fel ca și lărgirea Doppler, nu lărgesc răspunsul individul al sistemului atomic, ci determină numai o deplasare aleatoare a frecvenței de rezonanță față de frecvența sistemului izolat. Ca rezultat răspunsul total al ansamblului de sisteme atomice este lățit în frecvență, lățire fiind de tip neomogen. Mărimea acestui efect variază de la mecanismul de lățire fiind de tip neomogen, depinzând de modul de creștere al cristalului, tehnicii de călire, eşantion la eşantion, depinzând de modul de creştere al cristalului, tehnicii de călire, concentrației sistemelor active şi a impurităților (creşterea concentrației sistemelor atomice active, în general determină scăderea calității elementului activ). Dacă distribuția aleatoare a acestor defecte se supune legii de distribuție Gauss atunci conturul spectral determinat de acest mecanism este de tip Gauss.

8.3 Lățirea fononică

In materialele active solide unul dintre cele mai importante mecanisme de lățire a nivelurilor energetice (respectiv a tranziției între două niveluri) este aşa numita *lățire fononică*. Față de acest mecanism, lățirea dipolară a tranziției este aproape neglijabilă. De ex. în materialul activ de tip rubin $\left(Cr^{3+} : Al_2O_3\right)$ cu o concetrație a ionilor de Cr^{3+} de aprox. $0{,}05\,\%$, densitatea acestora este $n_V \cong 2{,}5\cdot 10^{19}\ \text{ioni}/\text{cm}^3$, căreia îi corespunde o distanță medie dintre ionii Cr^{3+} de ≈ 30 Å. Deoarece ionii Cr^{3+} sunt suficient de depărtați unul față de altul, lățirea dipolară este neglijabilă. De aceea frecvența tranziției între nivelurile ionului de Cr^{3+} va fi determinată în primul rând de influența ionilor imediat apropiați din rețeua cristalină; în cazul considerat este importantă distanța dintre ionul Cr^{3+} și ionii de oxigen, respectiv de aluminiu.

O comprimare mecanică aplicată cristalului distorsionează rețeua cristalină determinând modificarea câmpului local cristalin și ca rezultat se modifică valoarea energiei nivelurilor între care are loc tranziția, respectiv valoarea frecvenței tranziției. Ca rezultat apare o deplasare statică a frecvenței tranziției.

Dacă materialul activ se află în echilibru termodinamic ionii rețelei cristaline din vecinătatea unui ion activ prezintă modificări ale poziției determinate de vibrațiile termice ale rețelei. Din această cauză valoarea câmpului electric determinată de ionul vecin în punctul unde este localizat ionul activ variază periodic cu o frecvență egală cu frecvența de oscilație a rețelei cristaline. Modificarea periodică a câmpului determină o deplasare periodică a frecvenței tranziției ionului activ (o modularea a acesteia). Acest efect este cunoscut sub denumirea de *lățire fononică* (lățire termică determinată de modularea frecvenței tranziției la frecvența fononilor).

Efectul nu reprezintă o deplasare statică a frecvenței de rezonanță, ca în cazul neomogeneităților cristaline, ci o deplasare periodică a acesteia în jurul valorii frecvenței de rezonanță, cu o frecvență egală cu frecvența oscilațiilor termice ale rețelei cristaline, care este de ordinul a 10^{12} Hz (Fig. 69).

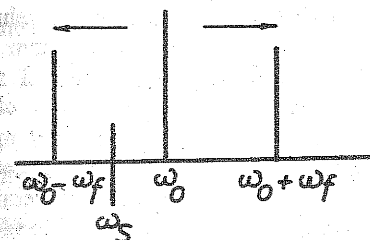


Fig. 69

Deoarece timpul de viaţă al unui sistem atomic este de ordinul a 10^{-9} s, în acest interval de timp conturul lui lăţit omogen se deplasează în domeniul spectral lăţit fononic de aprox. 10^4 ori. Prin urmare frecvenţa tranziţiei (respectiv conturul tranziţiei) fiecărui atom activ, într-un interval de timp de 10^{-12} s parcurge toate valorile din domeniul spectral al tranziţiei lăţite termic; un semnal extern a cărui frecvenţă este cuprinsă în domeniul spectral lăţit fononic poate interacţiona în mod identic cu toate sistemele atomice active supuse procesului de lăţire fononică. Din această cauză tranziţia lăţită fononic se comportă ca o tranziţie laţită de tip *omogen*. Dacă durata pulsului este foarte mică, de ordinul frecvenţei de oscilaţie al reţelei, atunci diferite sisteme atomice vor participa la interacţiune în mod diferit, iar tranziţia se va comporta ca una de tip neomogen.

Experienţe efectuate la diferite temperaturi în domeniul $(10 \div 1000)$K au evidenţiat dependenţa lăţirii tranziţiei spectrale de temperatură. La temperaturi scăzute lăţimea este determinată în special de neomogeneităţile întâmplătoare precum şi de cele de tip dipolar, iar la temperaturi ridicate predomină lăţirea fononică. In acelaşi timp s-a constatat că distorsiunile reţelei, precum şi vibraţiile acesteia au tendinţa de a deplasa frecvenţa medie a tranziţiei spre frecvenţe joase. Deci odată cu creşterea temperaturii vibraţiile reţelei cristaline determină pe de o parte lăţirea fononică, iar pe de altă parte deplasarea frecvenţei medii a tranziţiei spre valori mai mici ale frecvenţei. Aceste deplasări se iau în considerare la proiectarea unui sistem laser constituit dintr-un oscilator-pilot şi mai multe elemente active de amplificare. In timpul procesului de pompaj energia tranziţiilor neradiative contribuie la încălzirea aproape instantanee a cristalului ceea ce determină deplasarea medie a frecvenţei chiar în timpul procesului de pompaj. Din această cauză este posibil ca frecvenţa radiaţiei emise de către oscilatorul-pilot să fie deplasată faţă de banda de interacţiune a elementelor amplificatoare. De ex. s-a constatat că frecvenţa laserului de tip rubin la temperatura azotului lichid este de 6934 Å iar la temperatura camerei devine egală cu 6943 Å.

9. "Excitarea coerentă" a ansamblului de sisteme atomice

In cele analizate până acum s-a stabilit că într-un ansamblu de sisteme atomice în care se poate realiza o tranziţie cuantică între două niveluri energetice (sau ansamblu de dipoli electrici ataşaţi tranziţiei), sub acţiunea unui câmp al radiaţiilor optice convenabil ales, se induce o polarizaţie care reprezintă sursa unor efecte optice de interacţiune dintre câmp şi substanţă.

Până la apariţia laserilor, pentru a realiza acestă interacţiune, au existat numai surse de radiaţie optică care emit câmp cu grad mic al coerenţei (aşa numita *radiaţie termică*). Asemenea surse sunt de ex. toate lămpile care emit semnale cu spectru larg în mod continuu sau în pulsuri. In cadrul aceloraşi efecte este cuprinsă şi excitarea sistemelor atomice într-o descărcare electrică în regim continuu sau în regim de pulsuri scurte de curent.

Deoarece componentele armonice ale radiaţiei termice sunt necorelate (nu există o legătură între fazele acestor componente), nici momentele de dipol induse de

către acestea nu vor prezenta corelaţie de fază. In cazul excitării într-o descărcare în gaze (prin ciocniri electronice) de asemenea nu se realizează o corelaţie de fază între momentele de dipol induse în diferite sisteme atomice.

Dacă considerăm un ansamblu de sisteme atomice excitate foarte diluat şi la temperatură scăzută, acestea se vor relaxa în special prin emisie spontană necoerentă (timp de relaxare T_1), rata de amortizare fiind determinată de efectele radiative ($\gamma = \gamma_{rad}$). Ciocnirile dintre sistemele atomice (dipolii electrici) vor determina defazarea mişcării oscilatorii (timp de relaxare T_2), respectiv apariţia fenomenului de relaxare neradiativă (aceste observaţii sunt caracteristice fenomenului de fluorescenţă).

Radiaţia optică obţinută de la ansamblul de sisteme atomice prezintă caracteristicele esenţiale ale zgomotului de bandă spectrală îngustă. Ea este centrată pe frecvenţa tranziţiei ω_a, emisă în toate direcţiile (cu egală probabilitate în unghiul solid de 4π str) şi într-un domeniu spectral îngust. Puterea iniţială radiată este proporţională cu suma pătratelor puterilor radiate de către cei n_v dipoli individuali, adică este proporţională cu $n_v|p_{0x}|^2$.

Apariţia laserilor a permis efectuarea unor experimente de interacţiune a radiaţiei optice cu substanţa în care se utilizează pulsuri coerente. Câmpul aceste pulsuri prezintă un grad de coerenţă atât spectral cât şi temporal suficient ridicat. Un asemenea puls face ca momentele de dipol induse în diferite sisteme atomice să fie corelate în fază, adică ansamblul de sisteme să se comporte ca un singur dipol electric gigantic valoarea iniţială a momentului de dipol fiind egală cu $n_v p_{0x}$, respectiv puterea iniţială a radiaţiei emise de către ansamblul de dipoli ce oscilează coerent va fi proporţională cu $n_v^2|p_{0x}|^2$ (vezi prg. III 2.3).

Asemenea experienţe sunt cunoscute sub denumirea de *experienţe cu pulsuri coerente*, iar sistemele atomice ale ansamblului obţinute ca rezultat al acţiunii unui puls coerent sunt cunoscute sub denumirea de *sisteme pregătite coerent* sau *aliniate transversal*. Prin asemenea experimente se poate demonstra *emisia radiaţiei coerente* de către ansamblul de sisteme atomice pregătit coerent şi efectul defazării asupra gradului de coerenţă a acesteia.

Considerăm că printr-un mod oarecare de excitare necoerentă se populează două niveluri excitate E_m şi E_n între care se poate realiza o tranziţie spectrală. Ulterior populaţiile celor două stări se relaxează prin emisie spontană. Inainte ca populaţiile să se relaxeze se acţionează cu un puls coerent de durată foarte scurtă şi de putere mare, a cărui frecvenţă trebuie să fie egală cu frecvenţa tranziţiei (ω_{mn}). Acest puls va induce în sistemele atomice excitate în stările E_m şi E_n un moment de dipol $p(t)$ corespunzător tranziţiei $m \Leftrightarrow n$. Polarizaţia $p(t)$ indusă în sistemul atomic va reprezenta soluţia tranzitorie a ecuaţiei ce descrie evoluţia polarizaţiei sub acţiunea

câmpului electric al pulsului aplicat (vezi prg. III 2.3). Starea staţionară $\widetilde{P}(\omega)$ a susceptibilităţii nu poate fi atinsă deoarece durata pulsului aplicat este foarte scurtă.

Semnalul aplicat forţează sistemele atomice să oscileze în fază, atât spaţial cât şi temporal, prin urmare în ansamblu s-a indus o polarizaţie macroscopică coerentă. După trecerea semnalului prin ansamblu, sistemele atomice continuă să oscileze coerent (în fază). De aceea radiaţia emisă de către ansamblul pregătit în acest mod va prezenta coerenţă spaţială şi temporală, prin aceasta deosebindu-se de radiaţia emisă în mod spontan (zgomotul cuantic). Deoarece faza iniţială a sistemelor atomice "pregătite coerent", determinată de câmpul perturbator, este aceeaşi, momentele dipolare individuale sunt "aliniate", iar rezultanta lor va avea o valoare foarte mare. Amplitudinea "oscilaţiei coerente" a "momentului de dipol rezultant", precum şi radiaţia optică emisă de către acesta, se va amortiza cu rata $\left(\frac{\gamma_0}{2}+\frac{1}{T_2}\right)$, determinată de procesele radiative, respectiv cele de defazare. Dacă rata de amortizare prin procese de defazare $(1/T_2)$ este rapidă faţă de ratele de amortizare γ_m şi γ_n, atunci radiaţia coerentă prezentată mai sus se va disipa rapid, lăsând locul radiaţiei sub formă de emisie spontană, slabă ca intensitate dar de durată lungă. Amortizarea exponenţială a radiaţiei coerente indusă de către pulsul iniţial coerent este cunoscută sub denumirea de *amortizare liber indusă*. Pentru a putea înregistra acest fenomen sunt necesare receptoare de radiaţie foarte rapide.

De ex. o tranziţie spectrală pentru un ansamblu de sisteme atomice sub formă de gaz poate să prezinte o lăţime spectrală (preponderent de ciocniri) de aproximativ $\Delta\omega/2\pi \cong 1\,\mathrm{MHz}$, căreia îi corespunde un timp mediu de defazare $T_2 \cong 300\,\mathrm{ns}$. In momentul de faţă pot fi obţinute pulsuri coerente cu durată mult mai mică, care să fie utilizate pentru excitare. Acestea permit "alinierea transversală" a sistemelor atomice ale ansamblului considerat care vor emite un puls coerent amortizat cu o durată detectabilă, deoarece timpul de defazare este mare. In cazul ansamblului de sisteme atomice de tipul $\mathrm{YAG:Nd}^{2+}$ nu se poate realiza o asemenea situaţie. Deşi timpul mediu de viaţă al nivelului superior al tranziţiei ionului de Nd^{2+} este mare $(\tau_2 \cong 230\,\mu\mathrm{s})$, datorită fenomenului de interacţiune fononică prezent în matricea cristalină, timpul de defazare la temperatura camerei este $T_2 \cong 1\,\mathrm{ps}$, ceea ce face imposibilă observarea fenomenului cu dispozitivele actuale.

Cap. VII

SUSCEPTIBILITATEA CORESPUNZATOARE UNEI TRANZIŢII CUANTICE A UNUI ANSAMBLU DE SISTEME ATOMICE

1 Proprietăţile de polarizare ale tranziţiilor atomice.

Tranziţia sistemului atomic între niveluri energetice prezintă caracteristici anizotrope, ce pot fi exprimate numai printr-o mărime tensorială. Aceste caracteristici se manifestă atât în emisie spontană cât şi în răspunsul tranziţiei la o acţiune externă. In cazul cel mai simplu răspunsul poate fi polarizat liniar sau circular, însă în general răspunsul este eliptic polarizat, elipsa fiind raportată la un sistem de referinţă specific. Răspunsul indus al ansamblului este descris de tensorul susceptibilităţii care realizează legătura dintre semnalul aplicat (câmpul vectorial *em* aplicat) şi vectorul polarizaţiei atomice indus sub acţiunea semnalului.

Pentru a demonstra necesitatea acestui tensor, vom analiza caracteristicile unor tranziţii ale unui ansamblu de atomi liberi, plasaţi într-un câmp magnetic constant, câmp ce fixează spaţial o axă de simetrie la care atomii se pot raporta. Cazul cel mai simplu este cel al tranziţiei între un nivel inferior singlet (stare S), caracterizat prin momentul total $J=0$ şi un nivel superior (stare P), pentru care $J=1$. Stării P îi corespund $2J+1=3$ stări cuantice, care energetic coincid, deci factorul de degenerare este egal cu 3.

Dacă atomul este dispus în câmp magnetic constant, interacţiunea dintre atom şi câmp (efect Zeemann), determină despicarea nivelului degenerat în 3 stări energetic distincte, caracterizate prin numerele cuantice $m_J=1,0,-1$. In acest mod în spectru se vor manifesta trei tranziţii cu frecvenţe distincte (fig. 70). Dacă se analizează starea de polarizare a radiaţiei corespunzătoare tranziţiei $S(m_J=0)\Leftrightarrow P(m_J=0)$, se constată că este polarizată liniar ca şi cum ar fi radiată de către un dipol electric oscilant a cărui axă este orientată de-a lungul inducţiei câmpului magnetic aplicat; de-a lungul inducţiei magnetice sistemul radiant considerat nu emite radiaţie optică. Această

constatare este confirmată şi de analiza răspunsului atomului, dispus în câmp magnetic, supus acţiunii unui semnal *em* exterior; sistemul considerat nu reacţionează la acţiunea componentei electrice a câmpului radiaţiei optice dacă aceasta acţionează perpendicular pe direcţia inducţiei. Asemenea tranziţi, caracterizate prin $\Delta m_J = 0$, sunt cunoscute sub denumirea de tranziţii π.

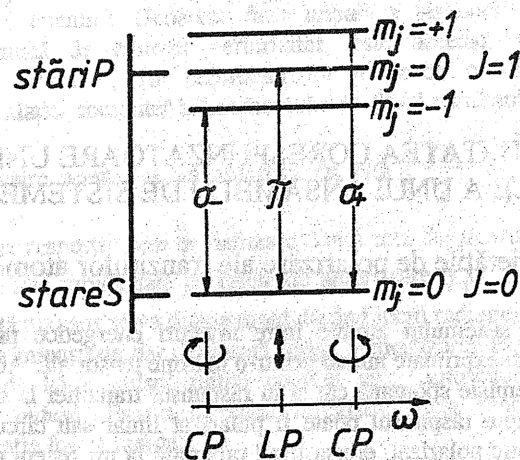


Fig. 70

De asemenea s-a stabilit că starea de polarizare a radiaţiei corespunzătoare tranziţiilor $S(m_J = 0) \Leftrightarrow P(m_J = +1, m_J = -1)$ este polarizată circular faţă de axa câmpului magnetic, cu sensuri de circulaţie opuse, atât în cazul emisiei cât şi în cazul răspunsului tranziţiei sistemului atomic dispus în câmp magnetic la acţiunea câmpului *em* extern. Aceste tranziţii, caracterizate prin $\Delta m_J = \pm 1$, sunt denumite tranziţii σ_+, respectiv σ_-.

Pentru a descrie starea de polarizare a radiaţiei emise de către ansamblul de sisteme atomice la tranziţiile prezentate este necesară analiza caracteristicilor cuantice ale tranziţiei atomice.

In teoria cuantică, starea cuantică a unui atom este complet determinată dacă se cunoaşte funcţia de undă cuantică $\Psi(\mathbf{r}, t)$, unde t - reprezintă momentul la care se determină starea, iar $\mathbf{r}$ - vectorul de poziţie. Evoluţia în spaţiu şi timp a funcţiei de undă se supune ecuaţiei Schrödinger. Pentru a stabili expresia funcţiei de undă $\Psi(\mathbf{r}, t)$ a unui atom în condiţii iniţiale date sau în cazul acţiunii asupra acestuia a unui semnal extern este necesară rezolvarea ecuaţiei Schrödinger.

Un sistem cuantic izolat (de ex. un atom) este caracterizat printr-un set de stări cuantice cu energie E_j ("stări staţionare"), cărora le sunt asociate funcţiile de undă $\varphi(\mathbf{r})$, care reprezintă soluţiile independente de timp ale ecuaţiei Schrödinger, corespunzătoare stării sistemului. Funcţiile de undă ale stărilor staţionare ale sistemului atomic formează un set de bază (set de moduri normale), cu ajutorul căruia se poate reprezenta, în fiecare moment, orice stare cuantică a sistemului atomic.

Starea unui sistem cuantic, la un moment dat, nu poate fi reprezentată numai printr-o funcţie de undă a setului de bază (sistemul cuantic nu se poate afla numai într-o singură stare energetică), ci printr-un *amestec* al stărilor cuantice de bază, dependent de timp, a cărui funcţie de undă este de forma:

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\widetilde{C}_1(t)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\varphi_1(\mathbf{r})+ \tag{1.1}$$
$$+\widetilde{C}_2(t)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\varphi_2(\mathbf{r})+\cdots+\widetilde{C}_j(t)e^{-i\frac{E_j}{\hbar}t}\varphi_j(\mathbf{r})$$

In absenţa perturbaţiei externe (a semnalului extern aplicat sistemului atomic) coeficientul complex $\widetilde{C}_j(t)$ nu depinde de timp, dependenţa de timp a funcţiei de undă $\Psi(\mathbf{r}, t)$ fiind inclusă numai în factorul $\exp\left(-i\frac{E_j}{\hbar}t\right)$.

Din relaţia (1.1) rezultă următoarele:

- Un sistem cuantic (atomul) nu se poate afla exact într-o stare energetică dată, ci numai într-o situaţie reprezentată printr-un amestec al stărilor de bază. Sistemul cuantic individual prezintă probabilitatea $\left|\widetilde{C}_1(t)\right|^2$ pentru a se afla în starea energetică E_1, respectiv, probabilitatea $\left|\widetilde{C}_2(t)\right|^2$ pentru a se afla în starea E_2, etc. Dacă considerăm un ansamblu format din n_v sisteme cuantice (atomi), atunci din acestea n_1 vor avea energia E_1, respectiv n_2 energia E_2,...

- dacă sistemului cuantic nu i se aplică o perturbaţie externă amestecul de stări este staţionar, adică factorii $\widetilde{C}_j(t)$ nu depind de timp. Factorul $\exp\left(-i\frac{E_j}{\hbar}t\right)$, dependent de timp, din dezvoltarea funcţiei de undă $\Psi(\mathbf{r}, t)$ după modurile normale, este necesar pentru a face ca funcţia de undă să reprezinte o soluţie a ecuaţiei Schrödinger.

Să analizăm interpretarea fizică a funcţiilor de undă totale ale sistemului cuantic. Dintre mărimile introduse pentru a caracteriza stare sistemului cuantic, prezintă

semnificaţie fizică mărimea pătratului funcţiei de undă totale $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$. Această mărime măsoară probabilitatea de a găsi un electron orbital în punctul localizat prin vectorul $\mathbf{r}$ (în sistemul de coordonate considerat), la momentul t. Prin urmare, valoarea cuantică "aşteptată" a densităţii de sarcină electrică, la momentul t, în punctul $\mathbf{r}$ al norului electronic este:

(1.2) $$\rho(\mathbf{r},t) = -e|\Psi(\mathbf{r},t)|^2.$$

Să determinăm densitatea de sarcină electrică în cazul particular al unui sistem cuantic cu două stări energetice (funcţia de undă totală este reprezentată de amestecul celor două stări energetice). In acest scop este necesar să se calculeze expresia:

$$|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \left[\widetilde{C}_1(t)\varphi_1(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \widetilde{C}_2(t)\varphi_2(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\right]^2 =$$

$$= |\widetilde{C}_1(t)|^2|\varphi_1(\mathbf{r})|^2 + |\widetilde{C}_2(t)|^2|\varphi_2(\mathbf{r})|^2 +$$

(1.3) $$+\widetilde{C}_1(t)\widetilde{C}_2^*(t)\varphi_1(\mathbf{r})\varphi_2^*(\mathbf{r})\exp\left(i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t\right) +$$

$$+\widetilde{C}_1^*(t)\widetilde{C}_2(t)\varphi_1^*(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r})\exp\left(-i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t\right) =$$

$$= \Phi_{constant}(\mathbf{r}) + \Phi_{osc.}(\mathbf{r},t)$$

Prin urmare densitatea de sarcină electrică conţine o componentă statică (independentă de timp) şi o componentă oscilantă cu frecvenţa ω_{21} dată de partea reală a sumei produselor complexe din relaţia (1.3):

(1.4) $$\Phi_{osc.}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\widetilde{C}_1(t)\widetilde{C}_2^*(t)\varphi_1(\mathbf{r})\varphi_2^*(\mathbf{r})\exp(i\omega_{21}t)\right],$$

unde: $\omega_{21} = \dfrac{E_1-E_2}{\hbar}$, reprezintă frecvenţa tranziţiei între cele două stări considerate.

Componentei oscilatorii i se poate atribui un moment de dipol cuantic, care poate fi comparat cu momentul de dipol oscilant clasic $\mathbf{p}(t)$. Mărimea momentului de dipol cuantic este proporţională cu produsul amplitudinilor $\widetilde{C}_1(t)\widetilde{C}_2^*(t)$, corespunzător celor două stări energetice, iar rata amortizării acestora coincide cu rata de amortizare (γ) a dipolului clasic. Faza variaţiei oscilatorie a densităţii de sarcină electrică este data de diferenţa de fază a coeficienţilor complexi:

$$\widetilde{C}_1(t) = |\widetilde{C}_1(t)|e^{-i\phi_1}; \quad \widetilde{C}_2(t) = |\widetilde{C}_2(t)|e^{-i\phi_2},$$

$$\widetilde{C}_1^*(t)\widetilde{C}_2(t) = |\widetilde{C}_1(t)\widetilde{C}_2^*(t)|e^{-i(\phi_1-\phi_2)}$$

Faza stărilor energetice individuale poate fi perturbată aleator de către procesele de defazare externe, chiar fără a se modifica modulul coeficientului complex (probabilitatea de populare a nivelului energetic: $|\widetilde{C}_1|^2$, respectiv $|\widetilde{C}_2|^2$).

2. Proprietăţile de polarizare ale tranziţiilor cuantice tip Zeemann.

Folosind rezultatul obţinut relativ la densitatea de sarcină electrică oscilantă, respectiv momentul de dipol oscilant, să analizăm drept ex. tranziţiile de tip Zeemann (despicarea Zeemann). Considerăm reprezentarea spaţială *tri*dimensională a distribuţiei de sarcină electrică corespunzătoare diferitelor stări staţionare, respectiv unui amestec de stări.

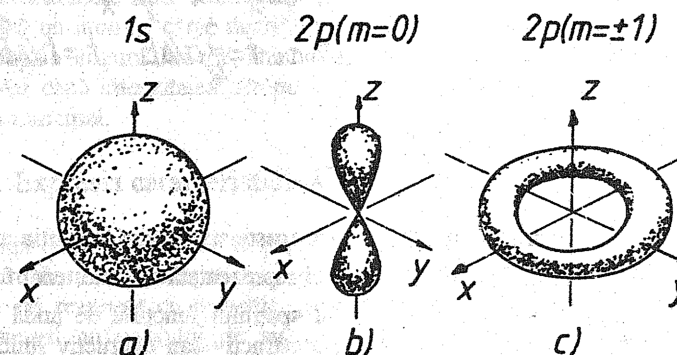


Fig. 71

Pentru a ne imagina reprezentare spaţială şi a urmări evoluţia în timp a amestecului, trebuie să considerăm faptul că funcţia de undă $\Psi(\mathbf{r},t)$ este complexă, deci în fiecare punct al spaţiului ea prezintă atât un modul, cât şi un unghi de fază. De ex. pentru starea $S(J=0)$, distribuţia spaţială prezintă o distribuţie sferică (Fig. 71a). In cazul stării $P_0(J=1, m_J=0)$, distribuţia spaţială este prezentată în fig. 71 b. Funcţia de undă P_0 prezintă semne opuse în lobul superior faţă de cel inferior. In cazul stări $P_{\pm1}(J=1, m_J=\pm1)$, distribiţia spaţială are o formă toroidală, iar funcţia de undă prezintă o variaţie de fază $[\exp(\pm i\theta)]$ pentru diferite puncte dispuse în jurul torului (Fig. 71 c).

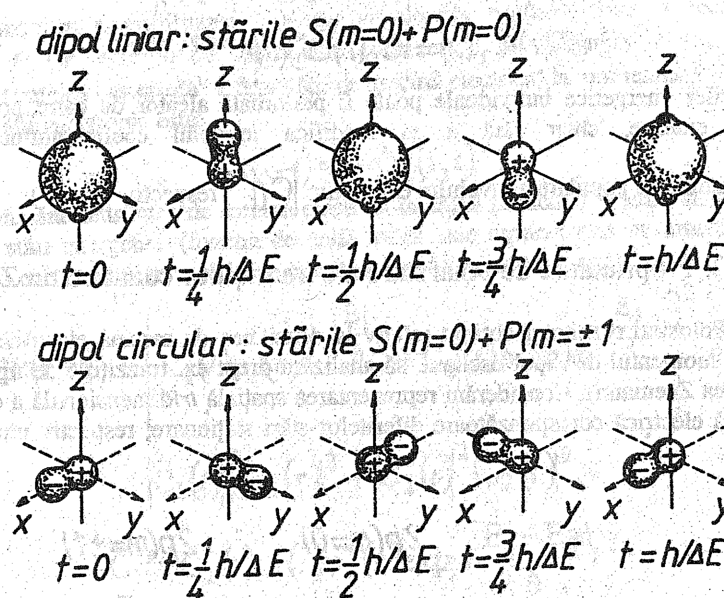


Fig. 72

Să analizăm rezultatul tranzițiilor între aceste stări. Dacă tranziția are loc între stările $1S$ și $2P_0$, funcția de undă totală va fi reprezentată de amestecul funcțiilor de undă a celor două stări. Intr-un punct dat al spațiului funcțiile de undă ale stărilor constituente ale funcției totale vor interfera constructiv sau distructiv funcție de faza mărimii complexe $\tilde{C}_1 \varphi_1(\mathbf{r})$, respectiv $\tilde{C}_2 \varphi_2(\mathbf{r})$; rezultatul interferenței se va "roti" cu frecvența ω_{21}, datorită termenului $\exp\left(-i\frac{E_j}{\hbar}t\right)$. Pentru o perioadă a variației acestui termen, densitatea de sarcină electrică, proporțională cu $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$, corespunzătoare tranziției între stările $1S$ și $2P_0$ va avea forma prezentată în fig. 72. Norul sarcinii electronice rezultate oscilează de-a lungul axei z, adică se comportă ca un dipol clasic oscilant liniar (tranziție tip π).

Să analizăm rezultatul tranziției între starea inferioară $1S$ și cea superioară $2P_1$. Din cauza dependenței factorului $\exp(i\theta)$ al funcției de undă staționare a stării P_1 de variația unghiului θ, la suprapunerea celor două funcții de undă, față de axa de

rotație poate avea loc "interferență constructivă", iar în partea opusă "interferență distructivă". Deoarece valoarea mărimilor $\tilde{C}_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$ și $\tilde{C}_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$ se rotește în timp, rezultatul "interferenței constructive" $\left|\varphi_1(\mathbf{r})+\varphi_2(\mathbf{r})\right|^2$, de asemenea se rotește în jurul axei z cu frecvența tranziției. De aceea atomul radiază la fel ca un oscilator circular polarizat în planul (x,y). Tipul de polarizație va fi funcție de numărul cuantic magnetic al $(m_j = \pm 1)$ al nivelului superior.

Radiația optică liniar și circular polarizată se observă în special la tranzițiile corespunzătoare unui atom sau moleculă liberă. Radiația corespunzătoare tranzițiilor sistemelor atomice ce formează o rețea cristalină sau o moleculă complexă, în general este eliptic polarizată cu un plan de polarizare arbitrar orientat, elipticitate arbitrară și cu orientare arbitrară a axelor elipsei în planul de polarizare.

Rezultatele descrise mai sus reprezintă proprietatea de polarizare cuanto-mecanică a radiației optice emisă la tranziția între două stări energetice a sistemului atomic. Acestea pot fi explicate cu ajutorul modelului clasic al dipolului electric atașat tranziției. Rezultatele sunt confirmate atât în emisia spontană cât și de fenomenele forțate. Dacă un atom a cărui distribuție de sarcină electrică, pentru o tranziție dată, oscilează după o singură direcție, atunci tranziția va răspunde la acțiunea semnalului *em* extern numai dacă intensitatea câmpului electric are aceeași direcție de acțiune ca și polarizarea tranziției.

3. Expresia caracteristicilor tensoriale ale susceptibilității.

După cum s-a stabilit în prg. 2. radiația emisă de către sistemul atomic la tranziția între două stări energetice, respectiv răspunsul cuantic al sistemului la acțiunea unui câmp *em* rezonant cu tranziția, prezintă caracteristici de polarizare. Din această cauză răspunsul ansamblului de sisteme atomice la acțiunea câmpului *em* extern (polarizația), corespunzător unei tranziții date, respectiv susceptibilitatea ansamblului trebuie să prezinte caracteristici tensoriale.

Considerăm un ansamblu de dipoli electrici reali căruia i se aplică un semnal *em* armonic (ω) rezonant. In regim staționar, considerând dependența liniară de intensitatea câmpului electric, polarizația ansamblului este dată de relația:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega)\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}(\omega),$$

unde $\tilde{\chi}(\omega)$ reprezintă un tensor 3×3 cu componentele $\tilde{\chi}_{xx}(\omega), \tilde{\chi}_{xy}(\omega), \cdots$.

In continuare sunt analizate caracteristicile tensoriale ale susceptibilității.

a) Tensorul susceptibilității unui ansamblu de dipoli electrici liniari aliniați.

Vom considera cel mai simplu exemplu și anume cel reprezentat de oscilatorul electronic liniar. Pentru a calcula susceptibilitatea este necesar să apreciem polarizația

ansamblului, deci să considerăm numărul de dipoli din unitatea de volum. Legătura dintre componenta $\widetilde{P}_x(\omega)$ a polarizației induse și componenta $\widetilde{E}_x(\omega)$ a câmpului *em* armonic excitator este:

$$\widetilde{P}_x(\omega)=\widetilde{\chi}_{xx}(\omega)\varepsilon\widetilde{E}_x(\omega).$$

Sarcina electrică a dipolului electric nu poate efectua deplasări de-a lungul direcțiilor y și z, deci sistemul nu va reacționa la acțiunea componentelor $\widetilde{E}_y(\omega)$ și $\widetilde{E}_z(\omega)$ ale câmpului *em*. Răspunsul ansamblului considerat la acțiunea câmului *em* extern poate fi prezentat sub formă matricială:

$$\widetilde{P}(\omega)=\begin{bmatrix}\widetilde{P}_x(\omega)\\ \widetilde{P}_y(\omega)\\ \widetilde{P}_z(\omega)\end{bmatrix}=\widetilde{\chi}(\omega)\varepsilon\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x(\omega)\\ \widetilde{E}_y(\omega)\\ \widetilde{E}_z(\omega)\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

unde apare un tensor adimensional, cu urma $Tr[T]=3$, și o mărime complexă $\widetilde{\chi}(\omega)$ care, în cazul unei tranziții Lorentz omogene, este dată de o relație asemănătoare cu (II 2.3):

$$\widetilde{\chi}(\omega)=-i\frac{1}{4\pi^2}\frac{\Delta n_v\lambda^3\gamma_{rad}}{\Delta\omega}\frac{1}{1+i\dfrac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega/2}}, \tag{3.2}$$

unde factorul 3 a fost introdus în mărimea tensorului adimensional.

b) Ansamblu de dipoli electrici aliniați polarizați circular.

Considerăm o tranziție cuantică a unui sistem atomic a ansamblului considerat care poate fi modelată cu ajutorul unui dipol electric "polarizat circular" $(\sigma_{\pm})$ raportat la planul (x,y). Relația se poate scrie sub forma matricială:

$$\widetilde{P}(\omega)=\begin{bmatrix}\widetilde{P}_x(\omega)\\ \widetilde{P}_y(\omega)\\ \widetilde{P}_z(\omega)\end{bmatrix}=\widetilde{\chi}(\omega)\varepsilon\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1&\mp i&0\\ \pm i&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{E}_x(\omega)\\ \widetilde{E}_y(\omega)\\ \widetilde{E}_z(\omega)\end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

unde $\widetilde{\chi}(\omega)$ este dat de relația (3.2), iar factorul 3/2 face ca urma matricei să fie egală cu trei.

Dacă un semnal *em* armonic liniar polarizat după direcția x:

$$\widetilde{E}_x(\omega)=\widetilde{E}_0(\omega),\quad \widetilde{E}_y(\omega)=\widetilde{E}_z(\omega)=0$$

acționează asupra ansamblului considerat, polarizația indusă în acesta va prezenta componentele complexe:

$$\widetilde{P}_x(\omega)=\frac{3}{2}\chi(\omega)\varepsilon\widetilde{E}_0(\omega),\quad \widetilde{P}_y(\omega)=\pm i\frac{3}{2}\chi(\omega)\varepsilon\widetilde{E}_0(\omega).$$

Partea reală a componentelor polarizației va fi de forma:

$$\widetilde{P}_x(\omega,t)=\mathrm{Re}\left[\widetilde{P}_x(\omega)e^{i\omega t}\right]=\frac{3}{2}\left|\widetilde{\chi}(\omega)\varepsilon\widetilde{E}_0\right|\cos(\omega t+\theta)$$

$$\widetilde{P}_y(\omega,t)=\mathrm{Re}\left[\widetilde{P}_y(\omega)e^{i\omega t}\right]=\frac{3}{2}\left|\widetilde{\chi}(\omega)\varepsilon\widetilde{E}_0\right|\sin(\omega t+\theta)$$

unde θ reprezintă modificarea fazei.

Deși semnalul *em* aplicat este liniar polarizat, polarizația indusă $P(\omega,t)$ este circular polarizată în planul (x,y), direcția vectorului polarizație se rotește $(x\to y)$ și $(x\to -y)$ pentru semnul (-). Forma (3.3) a susceptibilității conduce la comportare circular polarizată a polarizației induse, ea fiind caracteristică tranzițiilor de tip σ de dipol electric și unor tranziții de dipol magnetic. Dacă se efectuează o rotație față de sistemul de coordonate, atunci forma tensorului devine mai complicată.

c) Cazul răspunsului polarizat eliptic.

Din punct de vedere cuantic tranziția este caracterizată prin elementul matricei de dipol electric $\widetilde{p}_{21}$ de forma unei matrici-coloană:

$$\widetilde{p}_{21}=\int\Psi_2^*(r)(-er)\Psi_1(r)dr=\begin{bmatrix}\widetilde{p}_{21x}\\ \widetilde{p}_{21y}\\ \widetilde{p}_{21z}\end{bmatrix}.$$

Forma conjugat-hermitică $\left(\widetilde{p}_{21}^{+}\right)$ este reprezentată printr-o matrice-linie, ale cărei elemente $\left[\widetilde{p}_{21x}^{*},\widetilde{p}_{21y}^{*},\widetilde{p}_{21z}^{*}\right]$ sunt complex-conjugatele elementelor matricei-coloană.

Dacă asupra sistemului atomic (dipolului electric atașat tranziției) acționează un câmp *em* armonic rezonant $\widetilde{E}(\omega)$, valoarea așteptată a fazorului momentului de dipol indus de către câmpul aplicat tranziției este:

$$\tilde{p} = ct.\left[\tilde{p}_{21}^{+}\tilde{E}(\omega)\tilde{p}_{21}\right] = ct.\left[\tilde{p}_{21x}^{*}\tilde{p}_{21y}^{*}\tilde{p}_{21z}^{*}\right]\begin{bmatrix}\tilde{E}_x(\omega)\\ \tilde{E}_y(\omega)\\ \tilde{E}_z(\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{p}_{21x}\\ \tilde{p}_{21y}\\ \tilde{p}_{21z}\end{bmatrix} =$$

(3.4)

$$= ct.\begin{bmatrix}\tilde{p}_{21x}\\ \tilde{p}_{21y}\\ \tilde{p}_{21z}\end{bmatrix}\left[\tilde{p}_{21x}^{*}\tilde{p}_{21y}^{*}\tilde{p}_{21z}^{*}\right]\begin{bmatrix}\tilde{E}_x(\omega)\\ \tilde{E}_y(\omega)\\ \tilde{E}_z(\omega)\end{bmatrix}$$

(unde s-a folosit proprietatea de asociativitate a matricilor şi produsul cu un vector). Conform relaţiei (3.4), momentul de dipol indus depinde atât de proprietăţile de polarizare ale elementului de matrice al tranziţiei $\tilde{p}_{21}$ cât şi de starea de polarizarea a semnalului aplicat (răspunsul dipolului electric la acţiunea câmpului *em* aplicat depinde de cuplajul polarizării elementului de dipol electric cu polarizarea câmpului aplicat).

Polarizaţia macroscopică indusă în ansamblul de atomi reprezintă momentul de dipol al unităţii de volum, adică medierea asupra momentelor de dipol induse în sistemele atomice ale unităţii de volum. Răspunsul indus $\tilde{P}(\omega)$ al ansamblului va depinde de răspunsurile individuale ale sistemelor atomice ale ansamblului precum şi de dispunerea reciprocă a acestora.

Produsul $\tilde{p}_{21}\times\tilde{p}_{21}^{+}$ poate fi considerat sub forma:

(3.5) $$T = ct.\begin{bmatrix}\tilde{p}_{21x}\\ \tilde{p}_{21y}\\ \tilde{p}_{21z}\end{bmatrix}\left[\tilde{p}_{21x}^{*}\tilde{p}_{21y}^{*}\tilde{p}_{21z}^{*}\right] = \begin{bmatrix}\tilde{t}_{xx} & \tilde{t}_{xy} & \tilde{t}_{xz}\\ \tilde{t}_{yx} & \tilde{t}_{yy} & \tilde{t}_{yz}\\ \tilde{t}_{zx} & \tilde{t}_{zy} & \tilde{t}_{zz}\end{bmatrix},$$

unde ct. reprezintă o constantă de normare. Elementul *nm* al matricei T se obţine prin înmulţirea elementului n al matricei-coloană $\tilde{p}_{21}$ cu elementul m al vectorului-linie.

Polarizaţia macroscopică a unui ansamblu de dipoli aliniaţi se scrie sub forma:

$$P(\omega) = ct.\tilde{p}_{21}\cdot\tilde{p}_{21}^{+}\times\tilde{E}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega)\varepsilon T\tilde{E}(\omega).$$

De ex. presupunem că elementul matricei de tranziţie $\tilde{p}_{21}$ este vectorul-coloană $\begin{bmatrix}1\\ -i\\ 0\end{bmatrix}$, corespunzător rotirii spre dreapta a radiaţiei polarizate în planul (x,y).

Conjugatul hermitic $\tilde{p}_{21}^{+}$ este vectorul-linie $[1,i,0]$, iar tensorul adimensional al susceptibilităţii va fi:

$$T = \frac{3}{2}[1,i,0]\begin{bmatrix}1\\ -i\\ 0\end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & -i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

adică reprezintă rezultatul rotirii spre dreapta.

Momentul tranziţiei cuantice $\tilde{p}_{21}$ are trei componente complexe $(\tilde{p}_{21x},\tilde{p}_{21y},\tilde{p}_{21z})$ sau 6 numere reale independente prin intermediul cărora se poate calcula forma generală a tensorului T. Forma cea mai generală a răspunsului va fi un răspuns tensorial polarizat eliptic, cu o polarizaţie indusă $\tilde{P}(\omega)$ caracterizată printr-o elipticitate fixă, dar arbitrară şi o orientare arbitrară a axelor elipsei într-un plan de referinţă raportat la axele (x,y,z). Un asemenea răspuns se poate obţine din compunerea a două răspunsuri tensoriale liniar independente orientate reciproc perpendicular, cu amplitudini diferite şi un unghi de fază arbitrar. In acest mod se obţine un răspuns eliptic polarizat cu elipticitate arbitrară, dispus în planul (x,y). Efectând o rotaţie a coordonatelor (x,y,z) se pot genera toate formele posibile ale tensorului susceptibilităţii.

Din cele 9 elemente complexe ale tensorului normat al susceptibilităţii, 4 parametrii sunt ajustabili, ceilalţi 5 caracterizează răspunsul eliptic: orientarea în spaţiu a elipsei (3 parametrii), gradul elipticităţii şi condiţia de normare a tensorului (urma tensorului $\tilde{t}_{xx}+\tilde{t}_{yy}+\tilde{t}_{zz}=3$).

Orientarea spaţială a sistemului de referinţă pentru tensorul susceptibilităţii poate fi fixată de perturbaţia aplicată: direcţia câmpului magnetic constant (efectul Zeeman) sau direcţia câmpului electric constant (efect Starck), considerate de-a lungul direcţiei z.

De ex. pentru atomii liberi, răspunsul în câmp magnetic static poate fi liniar de-a lungul axei (tranziţie-π) sau se poate roti în jurul axei z (tranziţie-σ). Prin urmare nu se poate fixa direcţia axelor (x,y).

In cazul unei reţele cristaline răspunsul tensorial este raportat la axele de simetrie ale reţelei. In cazul moleculelor, tensorul se raportează la axele de simetrie ale configuraţiei de echilibru a acestora. Din cele prezentate rezultă că răspunsul unei tranziţii reale nedegenerate nu poate fi izotrop.

Răspunsul izotrop este de forma:

(3.6) $$\tilde{P}(\omega) = \begin{bmatrix}\tilde{P}_x(\omega)\\ \tilde{P}_y(\omega)\\ \tilde{P}_z(\omega)\end{bmatrix} = \tilde{\chi}(\omega)\varepsilon\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x(\omega)\\ \tilde{E}_y(\omega)\\ \tilde{E}_z(\omega)\end{bmatrix},$$

urma matricei caracteristice acestui răspuns fiind $Tr[T]=3$.

Un răspuns izotrop poate fi obţinut numai ca rezultat al medierii asupra ansamblului de sisteme atomice şi anume:

- răspunsul unui sistem atomic al ansamblului poate fi anizotrop cu o formă a tensorului nedegenerat analizată mai sus; sistemele atomice ale ansamblului pot prezenta axe de referinţă orientate aleator (de ex. în cazul unui gaz sau un material necristalin: lichid, pudră, sticlă). Medierea asupra orientării axelor sistemelor atomice conduce la un răspuns izotrop.

- răspunsul izotrop poate să provină din sumarea asupra unui set de tranziţii degenerate, adică tranziţii ce nu pot fi rezolvate în frecvenţă dacă nu s-a aplicat o perturbaţie externă care să înlăture degenerarea. Deoarece tranziţiile degenerate coincid în frecvenţă, ele nu pot fi excitate separat pentru a înregistra răspunsul individual. Sumarea prin suprapunere a răspunsurilor individuale conduce la un răspuns izotrop deoarece nu se poate defini o axă unică de referinţă pentru fiecare sistem atomic, axele de referinţă fiind orientate aleator, cu egală probabilitate, în toate direcţiile.

In aceste cazuri răspunsul ansamblului de sisteme atomice va fi izotrop, conform relaţiei (3.6), iar expresia susceptibilităţii $\widetilde{\chi}(\omega)$ va fi dată de relaţia (3.2), fără factorul 3.

In cazul unui asemenea ansamblu se poate considera că de-a lungul unei direcţii a sistemului rectangular de axe de coordonate sunt orientate $n_v/3$ sisteme atomice care prezintă răspuns liniar polarizat. Prin urmare pentru susceptibilitate se poate considera relaţia (3.2) (cu factorul 3), dar numărul de sisteme atomice participante la răspuns urmează să fie înlocuit cu $n_v/3$, ceea ce conduce la acelaşi rezultat.

4. Analiza energetică a interacţiunii dintre ansamblul de sisteme atomice şi perturbaţia *em*.

Rata transferului mediu de energie prin intermediul polarizării induse $p(t)$ de la câmpul *em* aplicat la ansamblul de dipoli electrici (sisteme atomice), calculată pentru unitatea de volum este:

$$\text{(4.1)} \qquad \frac{dU_a}{dt} = \left\langle e(t) \cdot \frac{dP(t)}{dt} \right\rangle.$$

Considerând că s-a realizat regimul staţionar al interacţiunii cu un câmp *em* armonic rezonant $(\omega = \omega_a)$, relaţia (4.1) se scrie:

$$\text{(4.2)} \qquad \frac{dU_a}{dt} = -\omega_0 \chi_0'' \frac{\widetilde{E}^* \widetilde{T} \widetilde{E} + \widetilde{E} \widetilde{T}^* \widetilde{E}^*}{4}.$$

Densitatea de energie a câmpului *em* armonic este dată de relaţia:

$$\text{(4.3)} \qquad U_{semnal} = \left\langle \frac{\varepsilon}{2} e^2(t) \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2} \left| \widetilde{E}^* . \widetilde{E} \right|$$

Raportul dintre rata transferului de energie şi densitatea de energie este:

$$\text{(4.4)} \qquad \frac{1}{U_{sem}} \frac{dU_a}{dt} = -\omega_0 \chi_0'' \frac{\widetilde{E}^* \widetilde{T} \widetilde{E} + \widetilde{E} \widetilde{T}^* \widetilde{E}^*}{2 \widetilde{E}^* . \widetilde{E}} !!!!.$$

Valoarea factorului adimensional din relaţia (4.4) este cuprinsă între zero şi trei, funcţie de starea de polarizare a câmpului *em* aplicat şi de forma normată a tensorului-răspuns caracteristic ansamblului de sisteme atomice (dipoli electrici).

In diferite situaţii acest factor are următoarele valori:

- a) *ansamblu constituit din dipoli electrici aliniaţi*

Nivelurile energetice implicate în tranziţie sunt nedegenerate, iar dipolii electrici ataşaţi tranziţiei sunt orientaţi după aceeaşi direcţie. In acestă situaţie, dacă se aplică un câmp *em* liniar polarizat, acesta poate fi cuplat cu ansamblul de dipoli astfel încât răspunsul ansamblului să fie maxim, prin urmare factorul adimensional din relaţia (4.4) va avea valoarea trei:

$$\frac{1}{U_{sem}} \frac{dU_a}{dt} = 3\omega_0 \chi_0''.$$

De asemenea dacă ansamblul de dipoli este aliniat va exista o orientare a direcţiei de acţiune a câmpului electric al semnalului *em* extern pentru care valoarea factorului adimensional va fi egală cu zero (tranziţia de dipol pclarizată liniar prezintă un plan în care răspunsul indus este egal cu zero).

Dacă asupra ansamblului de dipoli electrici aliniaţi acţionează un semnal extern a cărui direcţie de acţiune a câmpului electric este dispusă între cuplajul maxim şi minim, valoarea factorului adimensional va fi cuprinsă între valorile extreme: $3\omega_0 \chi_0'' \div 0$.

- b) *dacă ansamblul de dipoli nu este aliniat* (orientarea spaţială a dipolilor este aleatoare), atunci tensorul-răspuns la acţiunea câmpului extern liniar polarizat va fi izotrop, iar valoarea factorul adimensional va fi egală cu unitatea:

$$\frac{1}{U_{sem}} \frac{dU_a}{dt} = 1 \cdot \omega_0 \chi_0''.$$

- c) *dacă ansamblul de dipoli nu este aliniat*, iar semnalul *em* aplicat este nepolarizat, de asemenea valoarea factorului adimensional va fi egală cu unitatea;

- d) *în general valoarea factorului adimensional* (răspunsul ansamblului de sisteme atomice corespunzător tranziţiei date la acţiunea componentei electrice a câmpului *em* extern) depinde atât de tipul polarizării tranziţiei cât şi de structura polarizării câmpului *em* aplicat.

Pentru a marca aceste valori posibile ale factorului adimensional, în expresia susceptibilităţii s-a introdus "factorul-3^* (trei stelat)".

5. Niveluri de energie degenerate

a) distribuţia densităţii populaţiei pe subnivelurile unui nivel energetic degenerat

In prg. IV 1 s-a arătat că un nivel energetic dat poate fi degenerat (factor de degenerare g), adică este constituit dintr-un număr de subniveluri (stări energetice) fiecare fiind caracterizat prin seturi de numere cuantice diferite, dar toate având aceeaşi energie. Tranziţia cuantică ce se poate realiza între două niveluri energetice degenerate (E_1 şi E_2, caracterizate prin g_1 şi g_2), respectiv interacţiunea rezonantă dintre această tranziţie şi câmpul *em* extern cu frecvenţa ω_{12}, va reprezenta sumarea asupra unui număr de tranziţii având aceeaşi energie, dar caracterizate prin tării şi proprietăţi de polarizare diferite, funcţie de combinaţia subnivelurilor iniţiale şi finale.

Considerăm popularea celor două niveluri energetice, la echilibru termodinamic sau în afara acestuia, egală cu n_1 respectiv n_2. In ansamblul de subsisteme degenerate, dacă nivelul este populat, acţionează un proces de relaxare rapidă care determină egalizarea rapidă a populaţiei subnivelurilor (stărilor), chiar dacă un grup de subniveluri ale nivelului degenerat este perturbat, faţă de situaţia de egalizare a populaţiei, printr-un semnal rezonant extern foarte intens.

Din această cauză, la echilibru termodinamic se poate considera că populaţiile sunt repartizate egal pe subniveluri şi anume $\frac{n_1}{g_1}$, respectiv $\frac{n_2}{g_2}$. Distribuţia Boltzmann se aplică riguros pe subniveluri, deci:

(5.1) $$\frac{n_2/g_2}{n_1/g_1}=\exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right),\text{ adică: }\frac{n_2}{n_1}=\frac{g_2}{g_1}\exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right).$$

Ca o consecinţă a relaţiei (5.1), este posibil ca la echilibru termodinamic, populaţia unui nivel energetic puternic degenerat să fie mai mare decât populaţia unui nivel energetic inferior mai slab degenerat $(g_2 \rangle\rangle g_1)$, dacă este îndeplinită condiţia: $\frac{g_2}{g_1}\rangle\exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right)$. Această situaţie nu exprimă realizarea inversiei de populaţie deoarece nu conduce la fenomenul de amplificare a semnalului optic rezonant incident pe ansamblul considerat.

b) rata relaxării radiative totale

Viteza de variaţie a populaţiei nivelului energetic degenerat E_2 determinată de relaxarea radiativă este dată de relaţia:

(5.2) $$\frac{d\,n_2(t)}{dt}=-\sum_{r=1}^{g_1}\sum_{s=1}^{g_2}\gamma_{rad,2s\to1r}\frac{n_2(t)}{g_2},$$

fiind determinată de contribuţia relaxărilor radiative de pe subnivelurile nivelului energetic superior pe toate subnivelurile nivelurilor energetice inferioare.

Rata trebuie să fie identică cu rata de relaxare radiativă măsurată de factorul $\gamma_{rad,2\to1}$:

(5.3) $$\frac{d\,n_2(t)}{dt}=-\gamma_{rad,2\to1}\,n_2(t).$$

Din relaţiile (5.2) şi (5.3) rezultă:

(5.4) $$\gamma_{rad,2\to1}\equiv\frac{1}{g_2}\sum_{r=1}^{g_1}\sum_{s=1}^{g_2}\gamma_{rad,2s\to1r}\,.$$

c) Expresia susceptibilităţii în cazul unei tranziţi degenerate

Pentru a evalua mărimea răspunsului corespunzător tranziţiei între două niveluri degenerate este necesară sumarea răspunsurilor individuale corespunzătoare tranziţiilor între subniveluri $(E_{1r}\Leftrightarrow E_{2s})$. Expresia tensorului susceptibilităţii corespunzător unei tranziţii individuale este:

$$\tilde{\chi}_{1r,2s}(\omega)=\gamma_{rad,2s\to1r}\left(\frac{n_1}{g_1}-\frac{n_2}{g_2}\right)T_{2s\to1r}\,\tilde{g}(\omega),$$

unde: $T_{2s\to1r}$ - tensorul-răspuns al tranziţiei particulare, $\left(\frac{n_1}{g_1}-\frac{n_2}{g_2}\right)$ - diferenţa densităţilor populaţiilor corespunzătoare tranziţiei particulare, $\gamma_{rad,2s\to1r}$ - factorul de amortizare radiativ (tăria) tranziţiei particulare. Mărimea:

$$\tilde{g}(\omega)=-i\frac{\lambda^3}{4\pi^2\Delta\omega}\frac{1}{1+2i\dfrac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}},$$

reprezintă un factor ce descrie conturul spectral al tranziţiei individuale. Mărimea $\tilde{g}(\omega)$ este aceeaşi pentru toate tranziţiile particulare dacă acestea sunt caracterizate prin aceeaşi lăţime spectrală.

In aceste condiţii răspunsul total corespunzător tranziţiei între cele două niveluri degenerate va fi:

(5.5) $$\chi_{tot}(\omega)=\sum_{r=1}^{g_1}\sum_{s=1}^{g_2}\chi_{1r,2s}(\omega)=\tilde{g}(\omega)\sum_{r=1}^{g_1}\sum_{s=1}^{g_2}\gamma_{rad,2s\to1r}\left(\frac{n_1}{g_1}-\frac{n_2}{g_2}\right)T_{mediu},$$

unde T_{mediu} - tensorul susceptibilității mediat pe toate tranzițiile particulare implicate în tranziția totală.

Folosind rezultatul (5.4) relația (5.5) devine:

$$\chi_{1r,2s}(\omega)=\tilde{g}(\omega)\gamma_{rad,2\to1}\left(\frac{g_2}{g_1}n_1-n_2\right)T_{mediu}=$$

(5.6)
$$=-i\frac{3^*}{4\pi}\frac{\lambda^3\gamma_{rad,2\to1}}{\Delta\omega}\left(\frac{g_2}{g_1}n_1-n_2\right)\frac{1}{1+2i\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}}$$

unde s-a presupus că T_{mediu} este izotrop, deci factorul (3^*) are valoarea unu. Cazul $3^*=1$ (T_{mediu} - izotrop) corespunde de ex. unei tranziții între două niveluri energetice ale unui ansamblu sub formă de gaz format din atomi aliniați întâmplător (nealiniați). In cazul unei tranziții între niveluri degenerate ale sistemelor atomice ce formează o matrice solidă situația este mai complexă în sensul că tensorul T_{mediu} poate prezenta caracteristici anizotrope.

Rezultatul (5.6) este asemănător cu expresia (V 6.1) a susceptibilității nedegenerate, cu excepția diferenței densității de populație, care devine:

$$\Delta n\to\frac{g_2}{g_1}n_1-n_2.$$

Prin urmare condiția de inversie de populație (de câștig): $n_2(t)\rangle n_1(t)$, corespunzătoare tranziției între două niveluri energetice nedegenerate, în cazul a două niveluri degenerate trebuie înlocuită cu:

$$\frac{n_2}{g_2}\rangle\frac{n_1}{g_1},$$

adică este necesar să se realizeze inversie de populație pe subnivelurile între care se realizează tranziția individuală. Acest rezultat presupune că subnivelurile nivelului energetic degenerat rămân egal populate, densitatea de populație fiind egală cu $\frac{n}{g}$.

Pentru semnale *em* externe rezonante sub formă de câmpuri *em* foarte intense sau pentru pulsuri *em* foarte scurte față de rata de relaxare de ciocnire (T_2), este posibil ca unele tranziții ($(E_{1r}\Leftrightarrow E_{2s})$) să răspundă mai intens la semnalul aplicat decât altele, din cauza valorilor substanțial diferite ale coeficienților de relaxare $\gamma_{rad,2s\to1r}$, respectiv caracteristicelor de polarizare diferite. In acest caz este posibil ca semnalul aplicat să "forțeze" sistemele atomice să-și schimbe distribuția de populație

pe subniveluri în sensul că ele vor tranzita între subnivelurile $(E_{1r}\Leftrightarrow E_{2s})$ cu rate diferite.

Ratele diferite ale tranzițiilor vor distruge echilibrul distribuției densității populațiilor pe subniveluri, în special dacă, din anumite cauze, relaxarea populației între subniveluri este lentă față de evoluția în timp a semnalului perturbator. In acest mod se poate realiza un pompaj selectiv între subniveluri în special dacă degenerarea este ușor perturbată (ruptă), ceea ce reprezintă elementul esențial al tehnicii cunoscută sub denumirea de *tehnică prin pompaj optic*.

Dacă degenerarea nu este perturbată, totdeauna există procese de relaxare între subniveluri care tind să realizeze o distribuție egală a populațiilor. Aceste procese de relaxare "încrucișată" (cross-relaxation) sunt foarte rapide deoarece, având loc în interiorul nivelului energetic degenerat, redistribuția densității de populație se realizează fără schimb de energie. Insă este posibil ca evoluția în timp a unor semnale intense aplicate să depășească evoluția în timp a acestor procese de relaxare, dar numai pentru un interval de timp foarte scurt.

In cazul experiențelor cu "pulsuri coerente" (ansamblu de sisteme atomice aliniate), tranzițiile între nivelurile degenerate nu pot fi tratate drept tranziții între niveluri nedegenerate ușor perturbate. Ele trebuie considerate ca un set de tranziții multiple și independente, deși sunt puternic cuplate la aceeași frecvență.

Cap. VIII

INTERACȚIUNEA ANSAMBLULUI DE SISTEME ATOMICE CU FASCICULE INTENSE DE RADIAȚIE OPTICĂ

In capitolele anterioare a fost analizată dinamica sistemului atomic (dipol electric atașat tranziției), respectiv a ansamblului de sisteme atomice, supus acțiunii unui semnal *em* rezonant. Ca rezultat a fost introdusă noțiunea de susceptibilitate electrică liniară, respectiv ecuațiile cinetice ale populației nivelurilor energetice implicate în tranziție, populații ce determină mărimea susceptibilității. Ambele caracteristici au fost introduse considerând aproximația regimului staționar al interacțiunii. Dacă ansamblului i se aplică un semnal *em* foarte intens (sau unul foarte scurt), atunci aproximația folosită (regim staționar al răspunsului) nu mai este valabilă, fiind necesară analiza răspunsului neliniar.

1. Cazul semnalului *em* de amplitudine mică.

Să analizăm condițiile fizice în care este valabilă această aproximație. Considerăm relațiile de bază care conduc la ecuațiile cinetice ale densității populației celor două niveluri energetice ale sistemului cuantic și aproximațiile implicate la considerarea acestora.

Evoluția în timp a polarizației ansamblului considerat indusă de acțiunea semnalului *em*, conform prg. I 4.2, este descrisă de ecuația diferențială:

$$\frac{d^2\mathbf{P}_x(t)}{dt^2}+\gamma\frac{d\mathbf{P}_x(t)}{dt}+\omega_a^2\mathbf{P}_x(t)=\frac{n_v e^2}{m_e}e_x(t) \tag{1.1}$$

care, folosind relația (I 7.6), devine:

$$\frac{d^2\mathbf{P}_x(t)}{dt^2}+\gamma\frac{d\mathbf{P}_x(t)}{dt}+\omega_a^2\mathbf{P}_x(t)=\frac{3\omega_a\varepsilon\lambda_a^3\gamma_r}{4\pi^2}n_v\, e_x(t). \tag{1.1'}$$

Folosind corespondența dintre caracteristicile modelului de dipol electric clasic și cele ale momentului de dipol cuantic atașat tranziției se poate trece la o ecuație echivalentă care descrie din punct de vedere cuantic evoluția în timp a valorii așteptate a polarizației $\langle\mathbf{P}(t)\rangle$ a ansamblului de sisteme atomice cu două niveluri energetice:

$$\frac{d^2\mathbf{P}_x(t)}{dt^2}+\Delta\omega_a\frac{d\mathbf{P}_x(t)}{dt}+\omega_a^2\mathbf{P}_x(t)= =\frac{3^*\omega_a\varepsilon\lambda_a^3\gamma_r}{4\pi^2}\Delta n_{12}(t)e_x(t)=K\,\Delta n_{12}(t)e_x(t), \tag{1.2}$$

unde ω_a - frecvența tranziției, $\Delta\omega_a=\gamma+\frac{2}{T_2}$ - lățimea spectrală a acesteia (factorul γ include amortizarea radiativă și cea neradiativă, iar $\frac{2}{T_2}$ se referă la lățirea colizională), γ_r - factorul de amortizare radiativă, iar $\Delta n_{12}(t)$ - diferența densității populaților celor două niveluri la momentul considerat. Susceptibilitatea electrică, conform relației (V 6.1), este proporțională cu valoarea $\Delta n_{12}(t)$.

Pentru a calcula susceptibilitatea liniară $\tilde{\chi}_{12}(\omega)$ corespunzătoare traziției este necesar să se rezolve ecuația (1.2), considerând un semnal *em* aplicat staționar, iar diferența de populație $\Delta n_{12}(t)$ - constantă în timp.

Până acum în ecuațiile cinetice ale populațiilor $n_1(t)$ și $n_2(t)$, respectiv $\Delta n_{12}(t)$, s-a presupus că valoarea densității de populație este constantă în timp. In acest scop s-a considerat că atât valoarea susceptibilității liniare (proporțională cu $\Delta n_{12}(t)$), cât și ecuațiile cinetice (care descriu variația mărimii $\Delta n_{12}(t)$) sunt respectate dacă se acceptă că variația în timp a diferenței de populație $\Delta n_{12}(t)$ este relativ lentă. Să analizăm condițiile în care se poate accepta această presupunere.

Să considerăm *răspunsul tranzitoriu* al polarizației ansamblului la acțiunea unui semnal sinusoidal: $e(t)=\tilde{E}_1\sin\omega_a t$, *rezonant* ($\omega\cong\omega_a$) aplicat la momentul $t=0$ ($\tilde{E}_1$ - fazorul semnalului considerat). Răspunsul tranzitoriu va fi de forma:

$$P_x(t)\cong-K\frac{\Delta n_{12}E_1}{\omega_a\Delta\omega_a}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)\right]\cos\omega_a t, \tag{1.3}$$

unde s-a presupus că lățirea colizională este predominantă. Relația (1.3), constituită din doi termeni, arată că răspunsul tranzitoriu este o oscilație cosinusoidală forțată, care tinde la regimul staționar cu o constantă de timp T_2.

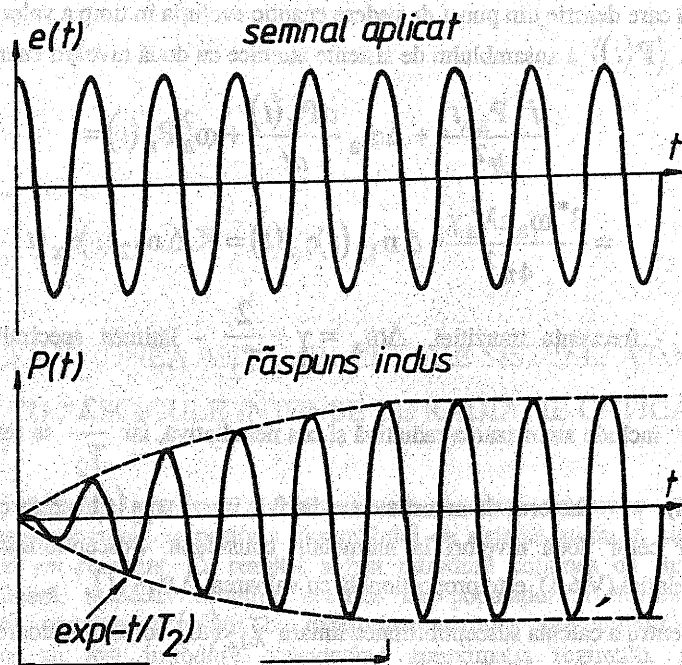


Fig. 73

In prg. I 4.2 s-a stabilit că, la acțiunea semnalului *em*, mărimea răspunsului forțat al polarizației $\mathbf{P}(t)$, în regim staționar, este diferită de zero numai dacă frecvența semnalului extern este în rezonanță sau în apropierea acesteia față de frecvența tranziției.

Conform rezultatelor descrise de relația (1.3) răspunsul sinusoidal forțat al polarizației ansamblului urmărește variațiile amplitudinii (sau fazei) câmpului *em* aplicat în limitele unui interval de timp de tranziție aproximativ egal cu T_2 (fig. 73). Prin urmare aproximația în rezolvarea ecuației polarizației este justă și permite stabilirea stării staționare, respectiv a răspunsului tranzitoriu, dacă mărimea $\Delta n(t)$ poate fi considerată constantă, adică dacă rata variației tranzitorii a lui $\Delta n(t)$ este lentă față de constanta de timp T_2. Cu alte cuvinte este importantă rata variației temporale a mărimii $\Delta n(t)$, nu variațiile mici ale amplitudinii mărimii $e(t)$.

Prin urmare variațiile amplitudinii sau fazei semnalului perturbator $e(t)$ cu o rată superioară lui T_2 nu pot fi sesizate de către ansamblul de sisteme cuantice, deoarece acesta nu poate prezenta răspuns la asemenea perturbări. Această observație poate fi analizată și sub altă formă: tranziția atomică prezintă o lățime finită ($\Delta\omega_a$), iar variațiile rapide ale amplitudinii sau fazei câmpului perturbator sunt echivalente cu prezența unor frecvențe laterale față de ω_a, care, funcție de rata variației pot fi dispuse în afara lățimii tranziției răspunsului atomic. Ca rezultat aceste frecvențe laterale induc un răspuns foarte slab sau acesta poate lipsi complet.

Să analizăm evoluția în timp a diferenței populației celor două niveluri energetice $\Delta n(t)$ sub acțiunea unui semnal *em* intens. Evoluția este descrisă de o ecuație diferențială asemănătoare cu (V 5.8 sau V 5.12):

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}+\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1}=-\frac{2}{\hbar\omega}e(t)\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}, \tag{1.4}$$

unde termenul din dreapta descrie schimbul de putere între câmpul *em* perturbator și ansamblul de sisteme cuantice (prin intermediul polarizației), exprimat în număr de fotoni (factorul 2 evidențiază faptul că în cadrul interacțiunii cu fotonii un sistem cuantic dispare de pe nivelul energetic superior și apare pe cel inferior, diferența populației variind cu două unități).

Relația (1.4) este justă și din punctul de vedere al mecanicii cuantice, putând fi folosită pentru a calcula valoarea așteptată a energiei sau a diferenței populației Δn într-un ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri energetice. Față de (V 5.8), ecuația (1.4) este mai generală în sensul că poate fi utilizată și în cazul semnalelor de intensitate mare, deoarece nu mai este limitată de legătura dintre $e(t)$ și $\mathbf{P}(t)$ ce apare în cazul staționar al amplitudinii și fazei.

Considerăm un semnal *em* *cvazi*sinusoidal de forma:

$$e(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{E}(t)\exp(i\omega_a t)\right], \tag{1.5}$$

aplicat ansamblului de sisteme cuantice considerat, adică un semnal a cărui frecvență este în apropierea rezonanței, dar fazorul lui depinde de timp (amplitudinea și faza sunt modulate). Răspunsul ansamblului la acțiunea câmpului se poate presupune de forma:

$$\mathbf{P}(t)\doteq\mathrm{Re}\left[\tilde{P}(t)\exp(i\omega_a t)\right]. \tag{1.6}$$

In aceste condiții partea dreaptă a ecuației (1.4) devine:

$$-\frac{2}{\hbar\omega}e(t)\frac{d\,\mathrm{P}(t)}{dt}=-\frac{i}{2\hbar}\left(\tilde{E}e^{i\omega_a t}+\tilde{E}^*e^{-i\omega_a t}\right)\left(\tilde{P}e^{i\omega_a t}-\tilde{P}^*e^{-i\omega_a t}\right)=$$

$$=\frac{i}{2\hbar}\left[\tilde{E}(t)\tilde{P}^*(t)-\tilde{E}^*(t)\tilde{P}(t)\right]-\frac{i}{2\hbar}\left[\tilde{E}(t)\tilde{P}(t)e^{i2\omega t}-\tilde{E}^*(t)\tilde{P}^*(t)e^{-i2\omega t}\right],$$

adică, alături de un termen *cvazi*constant, apare și un termen cu frecvețe $(\pm 2\omega)$ care este generator de câmpuri armonice (la frecvențe duble, triple sau conbinații).

Răspunsul diferenței de populație $\Delta n(t)$ din ecuația (1.4), la aplicarea câmpului (1.5) nu poate urmări variațiile fazorului $\tilde{E}(t)$ deoarece timpul de relaxare T_1 în mod normal este mare față de variațiile aleatoare ale fazorului câmpului *em*. Variațiile mărimii $\Delta n(t)$, la o anumită frecvență, se obțin ca rezultat al integrării ecuației (1.4) pe un interval de timp. Ca rezultat al integrării, după cum s-a stabilit în prg. I 4.2 sau V 5, termenul *cvazi*constant conduce la o variație semnificativă a mărimii $\Delta n(t)$, în timp ce contribuția termenului proporțional cu $\exp(\pm i2\omega t)$, după integrare pe câteva perioade optice, tinde la o valoare neglijabilă.

Dacă semnalul perturbator este foarte intens, termenii armonici vor determina o modulare slabă, dar diferită de zero, a variației diferenței de populație $\Delta n(t)$ la frecvența 2ω. Această variație a populației $\Delta n(t)$ va acționa asupra valorii $P(t)$ din dreapta ecuației și se va amesteca cu termenul ($\pm\omega$) din $e(t)$, conducând la apariția unor termeni sumă ($2\omega+\omega=3\omega$), respectiv diferență ($2\omega-\omega=\omega$). Termenii cu frecvența 3ω vor determina apariția unei polarizații cu aceeași frecvență care va fi sursa unui câmp *em* de aceeași frecvență. Acest lanț de efecte armonice poate continua spre ordine superioare, dar intensitatea efectelor (a câmpului radiat) scade cu creșterea ordinului. Semnale perturbatoare foarte intense vor determina apariția unor armonici de ordin par în variația lui $\Delta n(t)$, care vor reacționa determinând răspunsuri armonice de ordin impar ale polarizație și invers.

Răspunsuri armonice de ordin superior se evidențiază la generarea armonicilor și intermodulare sau, la intensități mari ale semnalului perturbator, pot apare fenomene de amestec. Aceste efecte neliniare reprezintă obiectul opticii neliniare.

Dacă se neglijează termenii generatori de armonici, ecuația (1.4) are forma:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}+\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1}=-\frac{i}{2\hbar}\left[\tilde{E}(t)\tilde{P}^*(t)-\tilde{E}^*(t)\tilde{P}(t)\right]$$

Considerând aproximația susceptibilității electrice liniare:

$$\tilde{P}(t)\cong\tilde{\chi}\varepsilon\tilde{E}(t)\cong(\chi'+i\chi'')\varepsilon\tilde{E}(t)$$

(unde mărimea $\tilde{\chi}$ este proporțională cu $\Delta n(t)$ - vezi relația V 6.1), ecuația (1.4) devine:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}+\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1}\cong-\frac{\varepsilon\chi''}{\hbar}\left|\tilde{E}(t)\right|^2\cong-2W_{12}\Delta n(t),$$

adică se obține ecuația (V 5.8).

Ecuația diferențială (1.4) scoate în evidență faptul că poate fi urmărită orice variație a mărimii $\Delta n(t)$. Soluția tranzitorie a acestei ecuații, presupunând un semnal cu amplitudine constantă, exprimată prin W_{12}, aplicat la momentul t, este de forma:

(1.7)

$$\Delta n(t)=\Delta n_{st.stap.}+\left[\Delta n(t_0)-\Delta n_{ss}\right]\exp\left[-\left(2W_{12}+\frac{1}{T_1}\right)(t-t_0)\right],$$

unde: Δn_{ss} reprezintă valoarea staționară parțial saturată a lui $\Delta n(t)$, care se obține pentru $t\to\infty$.

Condiția ca rata variației populației $\left(\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}\right)$ să fie lentă față de constanta de amortizare ($\frac{2}{\Delta\omega_a}$) a dipolului electric este:

(1.8) $$\left(2W_{12}+\frac{1}{T_1}\right)\langle\langle\Delta\omega_a=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}.$$

Din această inegalitate rezultă condiția: $T_1\rangle\rangle T_2$, adică lărgirea tranziției să fie esențial determinată de efectul de defazare (colizional), condiție satisfăcută de majoritatea tranzițiilor laser. Fiind îndeplinită această condiție, este necesar ca intensitatea semnalului perturbator să satisfacă condiția:

(1.8') $$W_{12}\langle\langle\Delta\omega_a,$$

adică rata tranziției stimulate să fie mică față de lățimea tranziției. Această condiție, pentru o tranziție de dipol electric, este echivalentă cu:

(1.9) $$\left|\tilde{E}\right|^2\langle\langle\frac{(\hbar\omega_a)^2}{\varepsilon\hbar\gamma_r\lambda^3}.$$

Din punct de vedere cuantic această condiție evidențiază faptul că perturbarea energiei interne a sistemului cuantic de către câmpul *em* trebuie să fie mică față de lățirea omogenă a tranziției exprimată în unități energetice ($\hbar\Delta\omega_a$).

Condiția (1.8) sau echivalenta ei (1.9) este îndeplinită în majoritatea sistemelor laser de mare putere, deoarece acestea generează pe tranziții atomice cu lățime foarte mică. De ex. lățimea tranziției în laserii cu gaz este cuprinsă în domeniul $(0{,}1\div10)$GHz, iar în cazul laserilor solizi în domeniul $(10^2\div10^3)$GHz. Valoarea timpului tranzitoriu de răspuns al polarizației se află în domeniul $(10^{-8}\div10^{-12})$sec, corespunzător $(0{,}1\div10^3)$GHz. Rata tranzițiilor stimulate în aceleași materiale se poate evalua egalând densitatea de putere laser (extrasă din unitate de volum de la mediul laser) cu densitatea inversiei de populație Δn (pe unitate de volum) înmulțită cu $\hbar\omega$ și cu rata tranzițiilor stimulate de către semnal (W_{ij}). Se obține o valoare a ratei tranzițiilor stimulate cuprinsă în domeniul $(10^3\div10^7)$sec^{-1}, adică condiția impusă este satisfăcută.

In ansamblul de sisteme atomice valoarea densității de populație $n_m(t)$ variază în timp și datorită fenomenelor de relaxare și a celor de pompaj, însă în materialele concrete aceste relaxări, față de inversul lățimii spectrale, sunt foarte lente. De ex. constanta de relaxare $(1/w_{mn})$, respectiv cea de pompaj $(1/W_{mn})$ se află în domeniul de valori: 10^{-3} sec (rubin), respectiv 10^{-4} sec (Nd^{2+} : YAG sau Nd^{2+} : sticlă), în timp ce inversul lățimii spectrale $\left(\frac{1}{\Delta\omega}\right)$ a acestor materiale se află în domeniul 10^{-11} sec.

In laserii cu coloranți timpul de relaxare, respectiv cel al tranziției stimulate, este mai rapid (domeniul $\left(10^{-9} \div 10^{-12}\right)$sec), însă inversul lățimii spectrale a acestor materiale este de ordinul $\frac{1}{\Delta\omega_a} \cong 10^{-13}$ sec, deci condiția este îndeplinită.

Să analizăm dacă în aproximația considerată rămâne valabilă condiția de saturație a diferenței de populație prezentată în prg. V 5.2. Intensitatea semnalului necesară pentru a obține saturație într-un ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri trebuie să îndeplinească condiția: $2W_{12}T_1 \geq 1$ sau $W_{12} \geq \frac{1}{2}T_1$, iar condiția de a fi în domeniul ecuațiilor cinetice este (1.8). Combinând cele două condiții se obține:

$$\frac{1}{2T_1} \leq W_{12} \leq \Delta\omega_a \equiv \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \qquad (1.10)$$

Dacă este satisfăcută condiția:

$$\frac{1}{T_1} \langle\langle \Delta\omega_a \text{, adică: } T_2 \langle\langle T_1,$$

relația (1.10) arată că diferența de populație poate fi saturată fără a încălca limitele impuse ecuațiilor cinetice. Această condiție este satisfăcută de majoritatea materialelor laser: rata relaxării energiei aproape în toate cazurile este mai lentă față de lățimea tranziției, deoarece lățimea este în general determinată de mecanisme de defazare sau chiar de cele neomogene, care sunt mult mai intense de cât cele de lărgire prin timp de viață.

Să analizăm cazul general adică efectul semnalelor intense în sistemele atomice *multi*nivel.

Modelul de dipol electric rezonant (susceptibilitatea electrică liniară asociată acestuia), respectiv ecuațiile cinetice ale populației sistemului cuantic *multi*nivel, conduc la un set de ecuații care permite analiza răspunsului sistemului cuantic *multi*nivel la acțiunea câmpului *em* extern rezonant. In cazul sistemelor cuantice *multi*nivel tranziției individuale i se atașează un model de dipol rezonant iar populațiile

$n_m(t)$ și $n_n(t)$ asociate celor două niveluri ale tranziție sunt considerate *cvazi*staționare. Polarizația (susceptibilitatea rezonantă corespunzătoare fiecărei tranziții) poate fi utilizată în ecuațiile Maxwell pentru a descrie amplitudinea, faza, polarizarea respectiv caracteristicile tensoriale ale răspunsului atomic pe o tranziție particulară. Evoluția în timp a mărimii dipolului electric rezonant este descrisă de o ecuație diferențială vectorială de ordinul doi; aceasta conține informații asupra amplitudinii, fazei și proprietățile tensoriale ale răspunsului tranziției.

Ecuațiile cinetice descriu transferul de energie între semnalul perturbator și ansamblul de sisteme atomice, prin urmare conțin informații relativ la mărimea intensității răspunsului sistemului atomic, dar nu conțin informații despre fază. Ele reprezintă un set cuplat de ecuații diferențiale de ordinul întâi care conțin populațiile tuturor nivelurilor energetice, mecanismele de relaxare și cele de pompaj, precum și semnalele *em* rezonante perturbatoare aplicate simultan ansamblului.

Prin urmare fiind dat un sistem cuantic *multi*nivel care interacționează simultan cu mai multe semnale rezonante se poate folosi polarizația (sau susceptibilitatea) corespunzătoare fiecărei tranziții pentru a determina variația fazei, câștigul și reacția determina variația fazei, câștigul și reacția inversă asupra semnalului aplicat și ecuațiile cinetice pentru a obține populația rezultantă a nivelurilor. Combinația acestor două aproximații conduce la descrierea răspunsului sistemului atomic la acțiunea câmpului *em* aplicat.

Există situații în care semnalul aplicat poate să încalce condițiile ecuațiilor ratelor. In acest caz apar efecte neliniare: amestec neliniar al frecvențelor, intermodulare, semnale armonice și fenomenul Rabi. Analiza detaliată a acestor fenomene se poate realiza folosind metodele analitice avansate ale mecanicii cuantice ca de ex. "matricea de densitate" și ecuațiile Bloch care sunt foarte utile pentru a analiza efectele de semnal intens și neliniare în sistemele cuantice cu două niveluri.

2. Interacțiunea ansamblului de sisteme atomice cu semnale *em* intense.

Considerăm o valoare a intensității semnalului *em* perturbator ce depășește pe cea impusă de condiția (1.8). Să analizăm în acest caz reacția ansamblului de sisteme atomice folosind un model care presupune trei condiții simplificatoare, și anume:

- considerăm un semnal perturbator rezonant: $e(t) = \tilde{E}_1(t)\exp(i\omega t)$, unde $\tilde{E}_1(t)$ - amplitudine lent dependentă de timp față de frecvența câmpului. Se poate presupune de asemenea că amplitudinea este foarte intensă dar constantă (independentă de timp), și se aplică brusc la momentul $t = 0$.
- în cazul semnalelor intense și cel al efectelor tranzitorii considerăm polarizația ansamblului de sisteme cuantice sub forma:

$$P(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{P}(t)\exp(i\omega t)\right] = \mathrm{Re}\left[-i\tilde{P}(t)\exp(i\omega t)\right].$$

Prin urmare, pentru a putea analiza efectele tranzitorii ale răspunsului atomic, acceptăm că amplitudinea polarizației $\tilde{P}_1(t)$ este dependentă de timp. De asemenea deoarece

semnalul *em* aplicat este la rezonanță, răspunsul $P(t)$ va fi defazat față de acesta cu $(-\pi/2)$; acest fapt se evidențiază atașând factorul $(-i)$ fazorului $\widetilde{P}_1(t)$. Dacă se introduce această relație în ecuația (1.2), separând termenii în $\exp(\pm i\omega t)$ se obține ecuația ce descrie evoluția în timp a amplitudinii $\widetilde{P}_1(t)$:

(2.1)
$$\frac{d^2 P_1(t)}{dt^2}+(i2\omega_a+\Delta\omega_a)\frac{dP_1(t)}{dt}+i\omega_a\Delta\omega_a P_1(t)=iKE_1(t)\Delta n(t).$$

Se poate neglija $\Delta\omega_a$ față de ω_a deoarece $\Delta\omega_a \langle\langle \omega_a$. In ceea ce privește dependența de timp a mărimii $\Delta\omega_a P_1(t)$, aceasta este lentă față de dependența mărimii $\omega_a P_1(t)$. Cu alte cuvinte fazorul $P_1(t)$ în intervalul de timp $1/\Delta\omega_a$ poate să varieze mult mai mult decât pe intervalul de timp al unui ciclu ($1/\omega_a$). Ca rezultat termenul $\frac{d^2 P_1(t)}{dt^2}$ poate fi neglijat față de $2\omega_a \frac{dP_1(t)}{dt}$, iar ecuația (2.1) devine:

(2.2 a)
$$\frac{dP_1(t)}{dt}+\frac{\Delta\omega_a}{2}\frac{dP_1(t)}{dt}\cong\frac{K}{2\omega_a}E_1(t)\Delta n(t).$$

Aceste aproximări, cunoscute sub denumirea de *aproximația anvelopei lent-variabilă*, sunt mai puțin restrictive față de aproximația ecuațiilor cinetice, deci permit analiza interacțiunii cu semnale intense sau foarte rapide.

In aceleași condiții să analizăm ecuația ce guvernează evoluția diferenței de populație. Am stabilit că răspunsul tranzitoriu al acestei ecuații este determinat de timpul de relaxare T_1, (care este lent).

- prin urmare ca o a treia aproximație, în partea dreaptă a ecuației (1.4) se va utiliza valoarea mediată a mărimii $e(t)\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}$, medierea fiind efectuată asupra câtorva cicluri ale mărimilor $e(t)$ și $\mathbf{P}(t)$. Această aproximație nu ia în considerare factorii armonici, dar este permisă pentru variații rapide ale anvelopei semnalului $e(t)$ sau polarizației $\mathbf{P}(t)$. Ecuația evoluției populației devine:

(2.2 b)
$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt}+\frac{\Delta n(t)-\Delta n_0}{T_1}\cong-\frac{1}{\hbar}E_1(t)P_1(t).$$

In această relație nu s-au considerat termenii complex-conjugați deoarece la rezonanță mărimea $P_1(t)$ va fi reală.

2.1 Soluția în cazul semnalelor intense; frecvența Rabi

Considerăm un semnal cu amplitudine constantă E_1, aplicat brusc la momentul $t=0$. Relațiile (2.2 a,b), care reprezintă baza analizei semnalelor foate intense, formează o pereche de ecuații diferențiale de ordinul întâi, liniare și cuplate. Din cele două ecuații rezultă relația:

$$\frac{d^2\Delta n(t)}{dt^2}+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2}+\frac{1}{T_1}\right)\frac{d\Delta n(t)}{dt}+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2T_1}+\frac{KE_1^2}{2\hbar\omega_a}\right)\Delta n(t)=\frac{\Delta\omega_a}{2T_1}\Delta n_0$$

Mărimea:

(2.3)
$$\frac{KE_1^2}{2\hbar\omega_a}=\frac{3^*}{8\pi^2}\frac{\gamma_r\varepsilon\lambda^3}{\hbar}E_1^2=\omega_R^2.$$

(are dimensiunile frecvenței la pătrat) se numește *frecvența Rabi* și depinde de valoarea intensității componentei electrice a câmpului *em* precum și de tăria tranziției prin intermediul factorului γ_r. Folosind (2.3), relația devine:

(2.4a)
$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2}+\frac{1}{T_1}\right)\frac{d}{dt}+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2T_1}+\omega_R^2\right)\right]\Delta n(t)=\frac{\Delta\omega_a}{2T_1}\Delta n_0.$$

De asemenea din ecuațiile (2.2 a,b) se poate obține și relația:

(2.4b)
$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2}+\frac{1}{T_1}\right)\frac{d}{dt}+\left(\frac{\Delta\omega_a}{2T_1}+\omega_R^2\right)\right]P_1(t)=\frac{KE_1}{2\omega_a T_1}\Delta n_0.$$

Pentru a analiza aceste ecuații, considerăm cazul în care sunt realizate următoarele alternative:

- ansamblul de sisteme atomice este supus acțiunii unui semnal E_1 foarte intens,
- sau timpurile de relaxare (T_1, respectiv T_2) ale sistemelor atomice sunt foarte mari, iar lățimea spectrală a tranziției ($\Delta\omega_a$) este foarte îngustă.

Dacă semnalul aplicat este foarte intens, atunci sunt realizate condițiile:

$$\omega_R \rangle\rangle \Delta\omega_a, \text{ adică: } \omega_R \rangle\rangle \frac{1}{T_1},$$

iar ecuațiile (2.4 a,b) iau forma:

(2.5)
$$\text{a)}\quad \frac{d^2\Delta n(t)}{dt^2}+\omega_R^2\Delta n(t)\cong 0$$
$$\text{b)}\quad \frac{a^2 P_1(t)}{dt^2}+\omega_R^2 P_1(t)\cong 0$$

a căror soluţie este:

$$\text{(2.6)}\qquad \begin{aligned} &a)\quad \Delta n(t)=\Delta n_0 \cos\omega_R t \\ &b)\quad P_1(t)=\sqrt{\frac{K\hbar}{2\omega_a}}\Delta n_0 \sin\omega_R t = P_m \sin\omega_R t. \end{aligned}$$

Evoluţia în timp a diferenţei de populaţie $\Delta n(t)$ şi anvelopa polarizaţiei $P_1(t)$ a ansamblului de sisteme atomice căruia i s-a aplicat un semnal intens sunt prezentate în fig. 74.

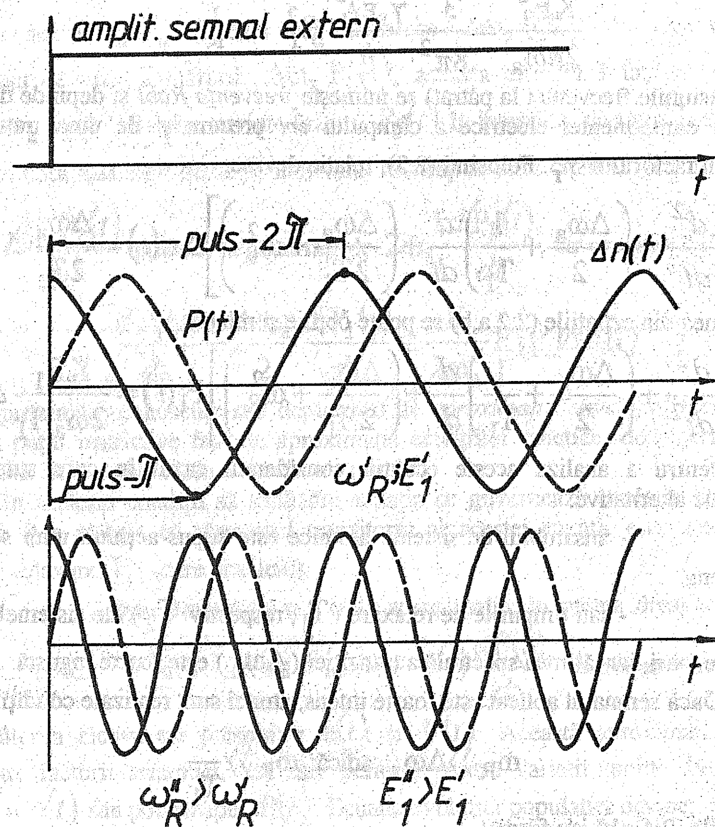


Fig. 74

Prin urmare comportarea ansamblului de sisteme atomice în cazul interacţiunii cu un semnal foarte intens este complet diferită de comportarea în cazul aproximaţiei ecuaţiilor cinetice. Valoarea diferenţei de populaţie $\Delta n(t)$ în loc să tindă exponenţial spre valoarea de saturaţie Δn_{ss} (conform aproximaţiei ecuaţiei cinetice), ea oscilează

între valoarea iniţială şi una opusă acesteia, cu o frecvenţă egală cu frecvenţa Rabi. In acelaşi timp amplitudinea polarizaţiei induse $P_1(t)$ în loc să tindă, printr-un regim tranzitoriu cu constanta T_2, spre cuplare cu semnalul aplicat, ea urmăreşte variaţia sinusoidală a diferenţei de populaţie $\Delta n(t)$, dar nu o ajunge niciodată deoarece între aceste mărimi periodic sinusoidale se păstrează mereu o defazare egală cu $T_R/4$.

Această comportare a mărimilor $\Delta n(t)$ şi $P_1(t)$ este cunoscută sub denumirea de *fenomenul de basculare Rabi* (Rabi flopping behaviour). Fenomenul poate fi explicat atât în cadrul analizei clasice cât şi a celei cuantice.

In aproximaţia semnalului foarte intens valoarea frecvenţei Rabi este mare faţă de $\Delta\omega_a \cong \frac{2}{T_2}$, respectiv $\frac{1}{T_1}$ dar mică faţă de frecvenţa câmpului *em* $\omega_R \langle\langle \omega_a$.

Prin urmare diferenţa densităţii populaţiilor, în interval de timp T_1 (sau T_2), oscilează de mai multe ori cu frecvenţa ω_R. Deoarece $\omega_R \langle\langle \omega_a$, aproximaţia anvelopei lent variabile pentru $\Delta n(t)$ şi $P_1(t)$ rămâne valabilă.

Din relaţia (2.6 a,b) reprezentată în fig. 74 rezultă că polarizaţia ansamblului este defazată cu $\pi/2$ faţă de variaţia lui $\Delta n(t)$, prin urmare valoarea maximă a lui $P_1(t)$ se atinge în momentul când $\Delta n(t)=0$, ceea ce este în contradicţie cu rezultatul obţinut în aproximaţia ecuaţiei cinetice, în care $\left|\tilde{P}(\omega)\right|$ este direct proporţional cu $\Delta n(t)$. Din punct de vedere fizic în această situaţie toţi dipolii electrici oscilanţi sunt aliniaţi în fază (intensitatea mecanismului de defazare este mică faţă de cea a semnalului aplicat). Din punct de vedere cuantic termenul cuantic oscilant $\left|\tilde{C}_1\right|^2\left|\tilde{C}_2^*\right|^2$ prezintă o valoare maximă: $\left|\tilde{C}_1\right|=\left|\tilde{C}_2\right|=\sqrt{1/2}$, unde probabilităţile de prezenţă satisfac condiţia: $\left|\tilde{C}_1(t)\right|^2+\left|\tilde{C}_2(t)\right|^2=1$.

Vom urmări să stabilim ecuaţiile diferenţiale complete ale mărimilor $\Delta n(t)$ şi $P_1(t)$, presupunând că la momentul $t=0$ este aplicat un semnal de amplitudine arbitrară, dar constantă în timp. Pentru o durată mare a interacţiunii trebuie să acceptăm că diferenţa densităţii de populaţie tinde la o stare staţionară. În acest caz soluţia staţionară a ecuaţiei (2.4 a) este de forma:

$$\lim_{t\to\infty}\Delta n(t)=\Delta n_{ss}\equiv\frac{\Delta n_0}{1+2T_1\frac{\omega_R^2}{\Delta\omega_a}},$$

relaţie asemănătoare cu (V 5.13). Din compararea cele două relaţii rezultă că şi în cazul aproximaţiei semnalului de intensitate mică probabilitatea tranziţiei forţate poate fi exprimată funcţie de frecvenţa Rabi şi lăţimea tranziţiei prin expresia:

(2.7) $$W_{12} = \frac{\omega_R^2}{\Delta\omega_a} = \frac{3^*}{8\pi^2} \frac{\gamma_r \varepsilon \lambda^3}{\hbar \Delta\omega_a} E_1^2 .$$

Deoarece, ca rezultat al interacţiunii, există tendinţa evoluţiei spre o stare staţionară trebuie să acceptăm existenţa amortizării fenomenului de basculare Rabi. Prin urmare, după parcurgerea mai multor cicluri Rabi, densitatea diferenţei de populaţie tinde spre o valoare staţionară descrisă de relaţia:

(2.8) $$\lim_{t\to\infty} \Delta n(t) = \Delta n_{ss} \equiv \frac{\Delta n_0}{1+2W_{12}T_1} = \frac{\Delta n_0}{1+S},$$

unde "factorul de saturaţie" S, dat de relaţia:

$$S = 2W_{12}T_1 = 2T_1 \frac{\omega_R^2}{\Delta\omega_a} = \frac{I}{I_{sat}},$$

este proporţional cu puterea semnalului perturbator, care a fost considerată în limitele aproximaţiei de semnal intens.

In continuare vom analiza soluţia exactă, adică cea valabilă pentru orice valoare a semnalului perturbator. In acest scop se introduc variabile:

- scala timpului se normează faţă de parametrul T_2: $t' = \frac{t}{T_2}$;

- amplitudinea normată a semnalului:

$$R = \omega_R T_2 = \frac{2\omega_R}{\Delta\omega_a};$$

- raportul constantelor de timp: $D = \frac{T_2}{T_1}$ (parametrul D va avea o valoare foarte mică);

- densitatea normată a populaţiei: $\hat{n} = \frac{\Delta n(t)}{\Delta n_0}$ şi polarizaţia normată: $\hat{p} = \frac{P_1}{P_0}$, unde: $P_0 = \sqrt{\frac{\hbar K}{2\omega_a}}\Delta n_0$.

Ecuaţiile cuplate (2.2 a,b sau cele echivalente 2.4 a,b) devin:

(2.9)
$$\text{a)}\quad \frac{d\hat{n}(t)}{dt'} + D[\hat{n}(t)-1] = R\hat{p}(t)$$
$$\text{b)}\quad \frac{d\hat{p}(t)}{dt'} + \hat{p}(t) = R\hat{n}(t)$$

In continuare este prezentată schiţa de rezolvare a sistemului de ecuaţii (2.9 ab). Pentru rezolvare să analizăm sistemul de ecuaţii omogene:

(2.10)
$$\text{a)}\quad \frac{d n_0(t)}{dt'} + Dn_0(t) + Rp_0(t) = 0$$
$$\text{b)}\quad \frac{d p_0(t)}{dt'} + \hat{p}_0(t) - Rn_0(t) = 0,$$

ale cărui soluţii le considerăm de forma:

(2.11 a) $$n_0 = A\exp(st')$$

(2.11 b) $$p_0 = B\exp(st'),$$

unde A, B şi s sunt parametrii ce urmează a fi determinaţi.

Soluţiile (2.11) introduse în setul (2.10 a,b) conduc la sistemul de ecuaţii:

(2.12)
$$\text{a)}\quad (s+D)A + RB = 0$$
$$\text{b)}\quad -RA + (s+1)B = 0,$$

a cărui ecuaţie caracteristică este:

$$s^2 + (D+1)s + DR^2 = 0,$$

cu: $$\Delta = (D+1)^2 + 4(D+R^2) = \frac{4^2}{\Delta\omega_a^2}\left[\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2 - \omega_R^2\right].$$

In rezolvarea problemei apar două cazuri extreme.

Cazul $\Delta > 0$: $$\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} > \omega_R .$$

In acest caz expresia parametrului s are forma:

$$s_{1,2} = \frac{2}{\Delta\omega_a}\left\{-\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right) \pm \left[\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2 - \omega_R^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} =$$
$$= T_2(-\alpha \pm \beta)$$

Dacă valorile $s_{1,2}$ se introduc în una din ecuațiile sistemului (2.12), de ex. în (2.12 b), se obțin valorile (A_1, B_1) respectiv (A_2, B_2) ale parametrilor A, B.

$$-RA_1+[T_2(-\alpha+\beta)+1]B_1=0,$$
$$-RA_2+[T_2(-\alpha-\beta)+1]B_2=0,$$

de unde:

$$B_1=R\frac{A_1}{T_2(-\alpha+\beta)+1},\quad B_2=R\frac{A_2}{T_2(-\alpha-\beta)+1}.$$

Funcția totală ce descrie dependența de timp a mărimii n_0 se exprimă ca o combinație liniară a funcțiilor (2.11 a sau b):

(2.13 a,b)

$$\hat{n}_0=A_1\exp[T_2(-\alpha+\beta)t']+A_2\exp[T_2(-\alpha-\beta)t']=$$
$$=A_1\exp[T_2(-\alpha+\beta)t]+A_2\exp[T_2(-\alpha-\beta)t]$$

$$\hat{p}_0=B_1\exp[T_2(-\alpha+\beta)t']+B_2\exp[T_2(-\alpha-\beta)t']=$$
$$=R\left\{\frac{A_1}{T_2(-\alpha+\beta)+1}\exp[(-\alpha+\beta)t]+\frac{A_2}{T_2(-\alpha-\beta)+1}\exp[(-\alpha-\beta)t]\right\}$$

Cazul $\Delta\langle 0$:
$$\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1}\langle\omega_R,$$
$$s_{1,2}=T_2(-\alpha\pm i\beta)$$

Dacă această expresie se introduce în ecuația (2.12 b) și se separă termenii după funcțiile *sin* și *cos* se obține:

$$-B_1T_2\beta-T_2B_2\alpha+B_2-RA_2=0,$$
$$-B_2T_2\beta-T_2B_1\alpha+B_1-RA_1=0.$$

De unde:

$$B_1=\frac{\beta RA_2T_2-(1-\alpha T_2)RA_1}{-\beta^2-T_2^2-(1-\alpha T_2)^2},$$
$$B_2=\frac{\beta RA_1T_2-(1-\alpha T_2)RA_2}{-\beta^2-T_2^2-(1-\alpha T_2)^2}.$$

Prin urmare expresia mărimilor n_0 și p_0 devine:

(2.14 a) $$n_0=(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t)e^{-\alpha t},$$

(2.14 b)
$$p_0=\frac{1}{-\beta^2-T_2^2-(1-\alpha T_2)^2}\times$$
$$\times\{[\beta RA_2T_2-(1-\alpha T_2)RA_1]\cos\beta t+$$
$$[\beta RA_1T_2-(1-\alpha T_2)RA_2]\sin\beta t\}e^{-\alpha t}$$

In continuare considerăm *ecuația neomogenă*. Presupunem $n_0'=C_1$ și $p_0'=C_2$ (unde C_1, C_2 sunt mărimi constante). Introduse în ecuația neomogenă (2.9 a,b) se obțin relațiile care permit exprimarea constantelor C_1, C_2 prin intermediul parametrelor sistemului:

$$D(C_1-1)=RC_2,\ \text{de unde: } C_1=\frac{D}{D+R^2}$$
$$C_2=RC_1\qquad C_2=\frac{RD}{D+R^2}.$$

Pentru a determina valoarea constantelor A_1 și A_2 trebuie fixate condițiile inițiale ale fenomenului descris de setul de ecuații (2.9 a,b):

Condiții inițiale:
$$\Delta n(0)=\Delta n_0\quad n_0(0)=1$$
$$p_1(0)=0\quad p_0(0)=0$$

Soluțiile generale în *cazul* 1 sunt de forma:

(2.15 a) $$\hat{n}(t)=A_1\exp[(-\alpha+\beta)t]+A_2\exp[(-\alpha-\beta)t]+C_1,$$

(2.15 b)
$$\hat{p}(t)=R\left\{\frac{A_1}{T_2(-\alpha+\beta)+1}\exp[(-\alpha+\beta)t]+\right.$$
$$\left.+\frac{A_2}{T_2(-\alpha-\beta)+1}\exp[(-\alpha-\beta)t]\right\}+C_2,$$

care la momentul inițial $t=0$ devin:

$$\hat{n}(0)=A_1+A_2+C_1=1,$$
$$\hat{p}(0)=R\left[\frac{A_1}{T_2(-\alpha+\beta)+1}+\frac{A_2}{T_2(-\alpha-\beta)+1}\right]+C_2,$$

relații ce permit calculul mărimilor A_1 și A_2.

In *cazul* 2 soluțiile generale au forma:

(2.16 a) $$\hat{n}(t)=(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t)e^{-\alpha t}+C_1,$$

$$\hat{p}(t)=\frac{1}{-\beta^2-T_2^2-(1-\alpha T_2)^2}\times$$

(2.16 b) $$\times\{[\beta RA_2T_2-(1-\alpha T_2)RA_1]\cos\beta t+$$

$$+[-\beta RA_1T_2-(1-\alpha T_2)RA_2]\sin\beta t\}e^{-\alpha t}+C_2$$

care la momentul inițial devin:

$$\hat{n}(0)=A_1+C_1=1,$$

$$\hat{p}(0)=\frac{1}{-\beta^2-T_2^2-(1-\alpha T_2)^2}\{\beta RA_2T_2-(1-\alpha T_2)RA_1\}+C_2,$$

relații ce permit calculul mărimilor A_1 și A_2:

$$A_1=1-C_1,$$

$$A_2=\frac{[\beta^2T_2^2+(1-\alpha T_2)^2]C_2-[(\alpha T_2-1)R](1-C_1)}{\beta T_2 R}$$

S-a obținut un sistem de ecuații liniare cuplate ale căror soluții prezintă o comportare tranzitorie sub forma unei superamortizări sau sub formă oscilatorie, funcție de valoarea raportul:

$$\frac{2R}{1-D}=\frac{\omega_R}{\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1}}$$

Să analizăm cazurile extreme.

1 - *Regimul de superamortizare* sau cel al *semnalelor de intensitate mică*. Considerăm un semnal a cărui mărime a intensității componentei electrice a câmpului *em* este mică astfel încât îndeplinește condiția:

$$\omega_R\langle\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1}.$$

Aceasta înseamnă că frecvența Rabi (sau câmpul electric) este mică față de lățimea tranziției (prin urmare și probabiliatatea tranziției stimulate W_{12} este mică față de $\Delta\omega_a$). Soluția exactă va fi superamortizată și se va exprima prin două amortizări exponențiale de forma:

$$-\alpha\pm\beta=-\left(\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1}\right)\pm\left[\left(\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1}\right)^2-\omega_R^2\right]^{1/2},$$

unde $\alpha\langle\beta$. Această condiție, la limită, tinde la ecuația ratelor. Dacă presupunem că la momentul inițial (când se aplică câmpul *em*) sistemul atomic este în repaus ($P_1(0)=0$ și $\Delta n(0)=\Delta n_0$), soluția va fi de forma:

$$\Delta n(t)=\Delta n_{sat}\left[1+Se^{-\alpha t}\left(\cosh\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sinh\beta t\right)\right],$$

unde mărimile Δn_{ss} și S au fost definite mai sus. In cazul semnalului slab ($\omega_R\langle\langle\Delta\omega_a$) și al amortizării radiative lente a energiei $\frac{1}{T_1}\langle\langle\Delta\omega_a$ cele două constante de timp tind la valoarea:

$$\alpha=\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1}\to\frac{\Delta\omega_a}{4};$$

$$\frac{\Delta\omega_a}{4}\beta=\left[\left(\frac{\Delta\omega_a}{4}+\frac{1}{2T_1}\right)^2-\omega_R^2\right]^{1/2}\cong$$

$$\cong\frac{\Delta\omega_a}{4}\left(1-\frac{1}{2}\frac{16\omega_R^2}{\Delta\omega_a^2}\right)=\frac{\Delta\omega_a}{4}-2W_{12}$$

deci:
$$\alpha+\beta\cong\frac{\Delta\omega_a}{4},\text{ respectiv:}$$

$$\alpha-\beta=\frac{\Delta\omega_a}{4}+\frac{1}{T_1}-\frac{\Delta\omega_a}{4}-2W_{12}=2W_{12}+\frac{1}{T_1}.$$

Prin urmare la limită ecuația poate fi aproximată prin:

$$\Delta n(t)\cong\Delta n_{ss}\left\{1+S\exp\left[-\left(2W_{12}+\frac{1}{T_1}\right)t\right]\right\},$$

care reprezintă relația (V 5.15) obținută în cazul regimului tranzitoriu al ansamblului de sisteme cuantice cu două niveluri energetice. Prin urmare, în cazul semnalelor slabe, comportarea de tip Rabi tinde lent la comportarea ecuațiilor ratelor sub semnal slab.

2 - *Regimul semnalelor intense*. Pentru semnale intense este îndeplinită condiția:

$$\omega_R\rangle\frac{\Delta\omega_a}{4}-\frac{1}{2T_1},$$

ecuația nu este amortizată, adică apare o pereche de constante complex-conjugate:

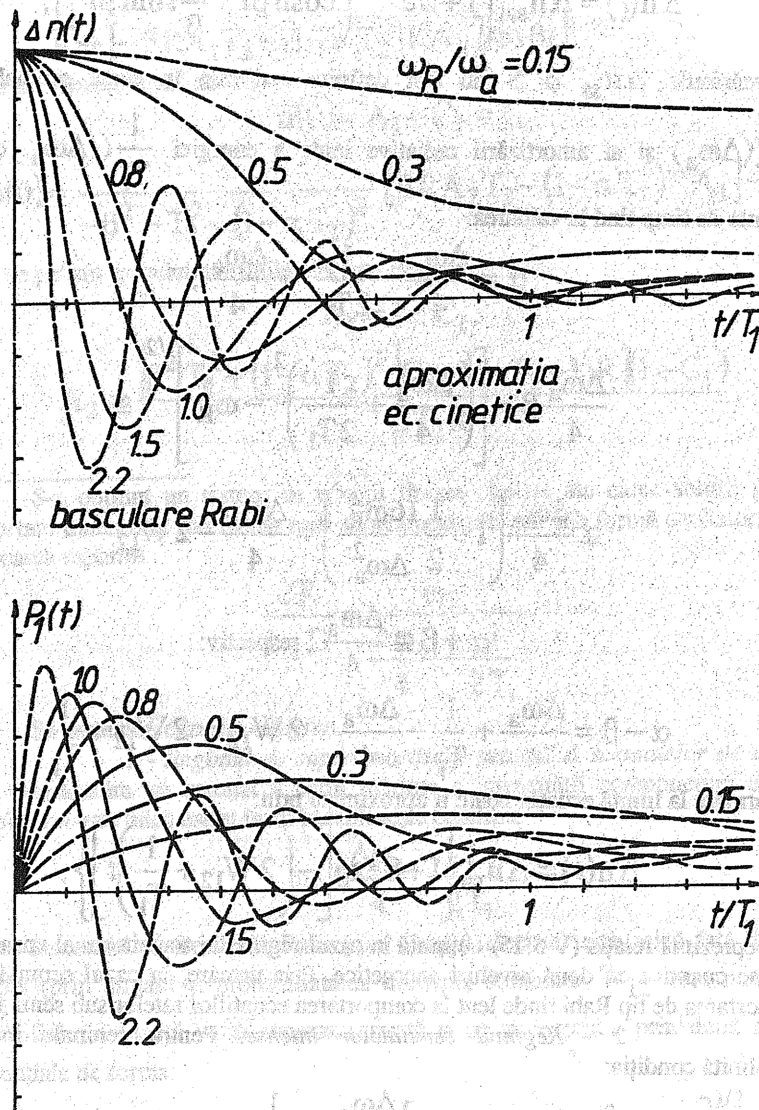


Fig. 75

$$-\alpha \pm i\beta = -\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right) \pm i\left[\omega_R^2 - \left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Partea imaginară a acestei expresii reprezintă o frecvenţă de tip Rabi modificată:

$$\omega_R' \equiv \sqrt{\omega_R^2 - \left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2}, \tag{2.17}$$

care include efectele amortizării şi cele ale defazării.

In acest caz, pentru aceleaşi condiţii iniţiale, dependenţa de timp a diferenţei densităţii de populaţie este:

$$\Delta n(t) \cong \Delta n_{ss}\left\{1 + S e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)\right\}.$$

Rezultatele (2.2 a,b sau 2.4 a,b) sunt reprezentate în fig. 45 a,b funcţie de $\frac{t}{T_1}$ pentru frecvenţe Rabi variind în intervalul $(0{,}15 \div 2{,}2)$ din lăţimea spectrală. Aceste valori acoperă domeniul de la regimul de semnal slab, la care se supun ecuaţiile cinetice, până la domeniul regimului de semnal intens, când se manifestă fenomenul de basculare Rabi. Intre aceste extreme densitatea diferenţei de populaţie oscilează cu frecvenţa Rabi $\omega_R' \langle \omega_R$. Fenomenul de basculare Rabi se amortizează pe măsură ce efectele de defazare descrise de $\Delta\omega_a$, în decursul regimului tranzitoriu, distrug mişcarea coerentă.

Fenomenul de basculare Rabi este un fenomen cuantic care reiese din ecuaţia Schrödinger aplicată unui sistem cuantic cu două niveluri perturbat de un câmp *em* relativ intens. Chiar şi în cazul regimului semnalelor slabe, în care nu se manifestă fenomenul de basculare Rabi, frecvenţa ω_R reprezintă o măsură naturală a intensităţii câmpului electric aplicat tranziţiei de frecvenţă ω_a. Mărimea $\hbar\omega_R$ reprezintă o măsură a hamiltonianului perturbaţiei determinată de câmpul *em* aplicat sistemului cuantic, după cum $\hbar\Delta\omega_a$ reprezintă o măsură a hamiltonianului perturbaţiei întâmplătoare determinată de mecanismele de relaxare, de cele de defazare sau de lărgire fononică ce acţionează asupra sistemului cuantic, iar $\hbar\omega_a$ este o măsură a hamiltonianului neperturbat (static) al sistemului cuantic.

Considerând relaţia ($W_{12} = \omega_R^2/\Delta\omega_a$), condiţia aproximaţiei pentru ecuaţiile cinetice ($W_{12} \langle\langle \Delta\omega_a$) trece în condiţia:

$$\omega_R \langle\langle \Delta\omega_a,$$

adică pentru a ne situa în aceste condiţii frecvenţa Rabi trebuie să fie mică faţă de lăţimea tranziţiei $\Delta\omega_a$.

Din punct de vedere fizic comportarea descrisă de ecuaţia cinetică se manifestă atunci când intensitatea semnalului aplicat (deci şi frecvenţa Rabi) este atât de mică încât fenomenul de defazare sau cele de relaxare apar în mod sigur şi distrug comportarea sub formă de basculare Rabi înainte de a se completa un ciclu Rabi. Efectele coerente sau de semnal intens apar, pe de altă parte, atunci când atomii pot fi "dirijaţi" pe mai multe cicluri Rabi într-un interval de timp scurt faţă de timpurile de relaxare T_1 sau T_2.

3. Efectele pulsurilor coerente

Fenomenele de tipul basculării Rabi se pot observa folosind semnale-puls foarte scurte şi metode de detecţie tranzitorie. Aceasta, pe de o parte, deoarece este mai simplu să se obţină semnale sub formă de puls, iar pe de altă parte deoarece bascularea Rabi se evidenţiază mai clar în regim tranzitoriu decât în regim staţionar. Din această cauză s-au efectuat experienţe cu "pulsuri coerente".

Din analiza fenomenelor de basculare Rabi rezultă că dacă un puls suficient de intens cu o durată T_p, astfel încât $\omega_R T_p = \pi$, se aplică unui ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri energetice, sistemele populând nivelul energetic inferior (ansamblu absorbant), acesta poate "bascula" toată populaţia nivelului energetic inferior pe cel superior rezultând la sfârşitul pulsului un ansamblu de sisteme cuantice complet inversat, deci un mediu amplificator ($-\Delta n_0$). Acestea sunt cunoscute sub denumirea de experienţe cu "pulsuri-π" (Fig. 74). Se observă că există o corelaţie între amplitudinea pulsului E_1 şi durata lui T_p pentru a obţine un "puls-π". In acestă situaţie după trecerea pulsului populaţia este inversată şi începe procesul de amortizare spre starea de echilibru cu rata T_1.

Un puls pentru care $\omega_R T_p = 2\pi$ ("puls-2π" sau cu "aria" egală cu 2π) în prima parte va creea inversia de populaţie, după care populaţia va fi "basculată" în starea iniţială (fig. 74). Acest tip de puls nu transferă energie ansamblului de sisteme cuantice. Un puls cu o asemenea "arie" se propagă neatenuat prin ansamblul de sisteme cuantice, care, în mod obişnuit, pentru semnale de intensitate mică, este absorbant sau chiar opac. Fenomenul, evidenţiat experimental, este cunoscut sub denumirea de "*transparenţă auto-indusă*".

Pentru a analiza această comportare este necesar să se considere atât acţiunea pulsului asupra densităţii diferenţei de populaţie cât şi răspunsul ansamblului de sisteme cuantice (prin polarizaţia acestuia) la acestă acţiune. In prima jumătate ("π") a duratei pulsului-2π are loc un proces de transfer de energie de la puls la sistemele cuantice ale ansamblului, realizându-se inversia de populaţie. In partea a doua, ansamblul de sisteme cuantice "aliniat coerent" transferă semnalului energie prin radiaţie optică. Procesul de "pendulare" a energiei între puls şi ansamblul de sisteme cuantice este însoţit de

modificări ale formei pulsului după interacţiune faţă de cel iniţial. In timpul propagării viteza de propagare a pulsului prin ansamblul de sisteme este mai mică decât a câmpului *em*. De asemenea, în timpul propagării prin ansamblu, energia pulsului, faţă de cea a pulsului liber, este înmagazinată pentru un interval de timp în sistemele cuantice şi nu în undă.

In cele prezentate s-a considerat propagarea semnalului intens printr-un ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri energetice. In cazul real al propagării prin ansamblul de sisteme cuantice *multi*nivel apar fenomene noi.

De ex. să considerăm că prin ansamblul de sisteme cuantice *multi*nivel se propagă un semnal de intensitate mare a cărui frecvenţă este în rezonanţă cu frecvenţa tranziţiei $i \Leftrightarrow m$ şi un semnal de intensitate mică a cărui frecvenţă este la rezonanţă cu tranziţia $m \Leftrightarrow j$. Intr-o descriere simplificată semnalul intens va modula cu frevenţa Rabi (ω'_R) populaţiile $n_i(t)$ şi $n_m(t)$ implicate în tranziţie, modulare care se va manifesta în interacţiunea fascicului slab cu tranziţia $m \Leftrightarrow j$, prin intermediul populaţiei nivelului comun. Deci semnalul intens produce o modulare a semnalului slab.

Tratarea cuantică a efectelor de amestec al frecvenţelor şi de intermodulare implică utilizarea formalismului "matricii de densitate".

Cap. IX

REZONATORI OPTICI

In prg. VI 4 s-a stabilit că amplificarea în domeniul optic a unui semnal *em* are loc la propagarea acestuia prin *mediul activ*, adică printr-un ansamblu de sisteme cuantice identice în care a fost realizată inversia de populație. Amplificarea este determinată de faptul că, în unitate de timp, numărul proceselor de emisie stimulată este mai mare decât cel al proceselor de absorbție. Ambele procese, care sunt rezultatul interacțiunii radiației *em* cu substanța, au loc dacă frecvența semnalului coincide sau se află în apropierea frecvenței tranziției între două stări energetice ale sistemelor cuantice care formează ansamblul (mediul material).

Prin urmare pentru a realiza un dispozitiv fizic care să emită radiație optică pe baza fenomenelor forțate este necesar să se creeze mediul activ folosind energia dată de o sursă de pompaj, iar acesta trebuie să se afle într-un câmp de radiație a cărui frecvență să fie în rezonanță cu frecvența tranziției potențiale-laser a sistemelor cuantice ce formează ansamblul (mediul activ).

De aceea în continuare se analizează posibilitatea realizării unei cavități în care să se poată menține pentru un interval de timp cât mai mare o densitate de câmp de radiație *em*, distribuția spațială în cavitate a acestei densități, precum și cauzele care determină pierderea de radiație din cavitate. Cavitatea în care se introduce mediul activ poartă denumirea de *rezonator optic*.

Un rezonator optic, la fel ca și un rezonator din domeniul microundelor, trebuie să îndeplinească următoarele cerințe:

- volumul lui să fie suficient de mare pentru a putea conține o cantitate suficientă de material activ care să asigure oscilatorului optic o putere la ieșire suficient de mare;

- să permită amplificarea sau generarea de semnale într-o bandă de frecvență cât mai îngustă.

In domeniul optic aceste cerințe nu pot fi îndeplinite de către *rezonatorii* convenționali *închiși*, cunoscuți în domeniul microundelor. Pentru a obține, într-o bandă dată de frecvențe, o singură rezonanță între câmpul *em* și cavitatea rezonantă, dimensiunile cavității trebuie să fie de același ordin de mărime ca și cel al lungimii de undă a radiației emise, adică rezonatorul să fie *monomodal*. In domeniul optic, din punct de vedere tehnic această condiție este aproape irealizabilă. In plus rezonatorul ar prezenta un volum foarte mic, ceea ce nu satisface prima condiție.

Problema rezonatorilor optici a fost analizată de către Schawlow și Townes, Prohorov și Dicke, care au indicat posibilitatea utilizării în domeniul frecvențelor optice a *rezonatorilor deschiși*.

1. Optica matricială

Propagarea radiației optice în spațiul liber sau prin diferite sisteme optice poate fi urmărită folosind noțiunile de rază de radiație optică, fascicul de radiație optică, precum și legile refracției și cele ale reflexiei acestor raze la suprafața de separație a două medii optice.

In orice punct al spațiului unde este prezent câmpul de radiație optică se poate defini raza de radiație optică ca fiind o direcție normală la frontul de undă în acel punct. Direcția razei reprezintă direcția de propagare a energiei. Folosind acest model de descriere a propagării câmpului se neglijează fenomenul de difracție, precum și cel de polarizare.

In cele ce urmează modelul razei de radiație optică va fi aplicat în cazul fasciculelor paraxiale. O analiză mai puțin restrictivă este prezentată în diferite monografii, de ex. - V. Pop, *"Bazele opticii"*, Ed. Universității "Al. I. Cuza" – Iași.

Dintr-un fascicul de radiație optică, care se propagă în direcția z, se consideră o rază (se poate considera și o particulă, de ex. un electron) într-un punct al spațiului ocupat de acesta. Raza se poate defini dacă se cunoaște coordonatele unui punct prin care trece, precum și înclinarea (panta) față de direcția z de propagare. Deoarece fasciculul paraxial prezintă o simetrie cilindrică se poate urmări propagarea razei numai într-un plan care conține direcția de propagare. In acest plan este necesar să se cunoască distanța punctului față de axa z $[\mathrm{r}(z)]$ și panta razei față de direcția de propagare $\left[\frac{d\,\mathrm{r}(z)}{dz}\right]$. Rezultatele pot fi mult simplificate dacă în definiția pantei razei se introduce și indicele de refracție local:

$$\mathrm{r}'(z) = \mathrm{n}(z)\frac{d\,\mathrm{r}(z)}{dz}. \tag{1.1}$$

Să analizăm, de ex. propagarea în spațiul liber a unei raze între două puncte situate în planele $z_1 = \mathrm{ct}$, respectiv $z_2 = z_1 + \mathrm{L} = \mathrm{ct}$ (fig. 76). In planul z_1 raza poate fi definită prin distanța $\mathrm{r}_1(z_1)$ și panta dreptei $\frac{d\,\mathrm{r}_1(z_1)}{dz}$, elemente ce pot forma

o matrice-coloană. Raza intersectează planul $z_2 = ct$ în punctul $r_2(z_2)$, dar pe intervalul de propagare nu-şi modifică panta. Se observă că există relaţiile:

(1.2 a) $$r_2(z_2) = r_1(z_1) + L\frac{dr_1(z_1)}{dz}$$

(1.2 b) $$\frac{dr_2(z_2)}{dz} = 0 + \frac{dr_1(z_1)}{dz},$$

relaţii ce pot fi scrise sub forma matricială:

(1.3) $$\begin{bmatrix} r_2 \\ r_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1' \end{bmatrix}.$$

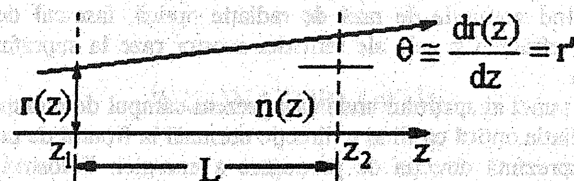


Fig. 76

Din această relaţie rezultă că fiecare sistem optic poate fi caracterizat printr-o matrice caracteristică, cunoscută sub denumirea de *matrice de transfer*, ale cărei elemente se exprimă funcţie de parametrii acestuia. Matricea acţionează asupra parametrilor care definesc raza prezentă la intrarea sistemului - *semnal intrare* - şi îi transferă la ieşirea acestuia sub forma parametrilor - *semnal ieşire*, ceea ce permite reconstituirea razei după ce a traversat sistemul optic.

Dacă A, B, C, D reprezintă elementele matricii de transfer a sistemului optic atunci se poate scrie relaţia generală:

(1.4) $$\begin{bmatrix} r_2 \\ r_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1' \end{bmatrix},$$

unde valoarea elementelor de transfer satisface condiţia:

(1.5) $$AD - BC = 1$$

(determinantul ataşat matricii este unitar).

2. Fascicule paraxiale de radiaţie optică

2.1 Ecuaţia de undă paraxială

Pentru a realiza analiza detaliată a propagării fasciculului de radiaţie optică în interiorul rezonatorului optic, precum şi a celui transmis în afara acestuia trebuie considerată natura ondulatorie a radiaţiei optice. Evoluţia componentei electrice a câmpului *em* în spaţiul liber (sau într-un mediu uniform şi izotrop) este descrisă de ecuaţia de undă:

(2.1) $$\nabla^2 e(x,y,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 e(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0.$$

(In loc de ecuaţia de undă vectorială va fi folosită cea scalară, deoarece în cele ce urmează vor fi considerate numai efectele de interferenţă şi difracţie; ecuaţia de undă vectorială furnizează informaţii despre starea de polarizare a câmpului, dar pentru moment acestea nu sunt necesare).

Fasciculele de radiaţie laser sunt suficient de colimate (se propagă în apropierea axului optic al rezonatorului), de aceea proprietăţile lor de interferenţă şi difracţie, în cadrul teoriei scalare, pot fi descrise folosind aproximaţia undei paraxiale. In continuare este stabilită expresia ecuaţiei de undă paraxială.

Dacă se acceptă drept soluţie a ecuaţiei (2.1) un câmp de forma:

(2.2) $$e(x,y,z,t) = \tilde{E}(x,y,z)e^{-i\omega t},$$

atunci ecuaţia (2.1) conduce la ecuaţia Helmholtz:

(2.3) $$\left[\nabla^2 + k^2\right]\tilde{E}(x,y,z) = 0, \text{ unde: } k^2 = \omega^2/c^2.$$

a) O soluţia a acestei ecuaţii este de forma:

(2.4) $$\tilde{E}(x,y,z) = E_0\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Dacă E_0 este o mărime constantă, $\mathbf{k}$ - vectorul de undă, iar $\mathbf{r}$ distanţa dintre sursa generatoare de câmp (care poate fi dispusă în originea sistemului de referinţă) şi punctul unde se determină fazorul câmpului, atunci soluţia (2.4) descrie fazorul unei *unde plane*. Aceasta, într-un plan perpendicular la direcţia de propagare $\mathbf{k}$, prezintă aceeaşi valoare a fazorului, adică valoarea amplitudinii E_0, respectiv a fazei $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ sunt constante. Dacă direcţia de propagare este z, atunci mărimea $E_0\, e^{-ikz}$ este constantă în orice plan perpendicular la această direcţie. Mărimea $\exp(-ikz)$ exprimă faptul că fazorul câmpului prezintă o variaţie importantă pe un interval egal cu lungimea de undă a radiaţiei.

b) O altă soluţie a ecuaţiei (2.3), valabilă pentru toate valorile $r \neq 0$, este de forma:

(2.5) $$\tilde{E}(x,y,z) = \frac{E_0}{R}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}.$$

Această soluţie prezintă o valoare constantă pe o suprafaţă sferică (caracterizate prin raza de curbură R) centrată în origine (*undă sferică*). Undele sunt generate de o sursă

punctiformă plasată în origine, iar intensitatea energetică (proporţională cu $|E(x,y,z)|^2$) se micşorează cu distanţa conform legii $\frac{1}{R^2}$.

Să analizăm soluţia (2.5) într-un plan (x,y), perpendicular la direcţia de propagare z, în punctul $z = R$ (planul este tangent la unda sferică în "polul undei"). In acest plan (fig. 77) se poate scrie:

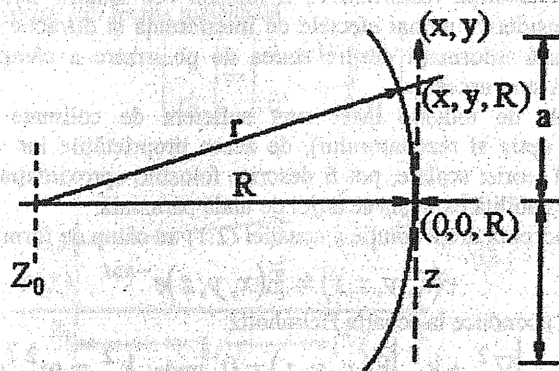


Fig. 77

(2.6) $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + R^2} = R\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}}.$$

Dacă analiza este limitată la o suprafaţă de arie mică centrată în jurul "polului" undei (este îndeplinită condiţia: $x^2 + y^2 \langle\langle R^2$), atunci relaţia (2.6) poate fi dezvoltată în serie, cu limitare la aproximaţia de ordinul doi, iar expresia fazei devine:

$$kr \cong kR + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R}.$$

In aceste condiţii, expresia câmpului în planul (x,y) este:

(2.7) $$\tilde{E}(x,y,z) = \frac{E_0}{r} e^{-ikR} e^{-i\frac{k(x^2+y^2)}{2R}}.$$

La numitorul relaţiei (2.7) se poate aproxima $r \cong R$, dar în argumentul funcţiei exponenţiale această aproximare nu se poate face, deoarece valoarea acesteia este de ordinul lungimii de undă. Câmpul descris de relaţia (2.7) reprezintă o aproximaţie foarte bună a undei sferice, dacă în planul (x,y) extensia maximă (a) în jurul "polului" undei este suficient de mică. Aproximaţia presupune că pot fi neglijaţi termenii pătratici

şi de ordin superior din dezvoltare, contribuţia lor la exponentul complex fiind mică faţă de variaţia maximă $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a acestuia:

$$\left|\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(2a)}{4R^3}\right| \langle\langle \frac{\pi}{2}, \text{ de unde: } \frac{a^2}{\lambda R} \langle\langle \frac{R^2}{(2a)^2},$$

condiţie ce este îndeplinită de *fasciculele paraxiale*.

Prin urmare dacă într-un plan perpendicular la direcţia de propagare, în condiţiile de paraxialitate, variaţia fazei câmpului este exprimată prin forma (2.7) atunci frontul de undă al câmpului considerat este de formă sferică.

c) Să considerăm un fascicul oarecare de radiaţie optică, care se propagă de-a lungul direcţiei z (acesta nu reprezintă un fascicul de raze paralele) şi un plan (x,y) perpendicular la această direcţie. De-a lungul direcţiei de propagare fazorul componentei electrice prezintă o variaţie rapidă pe o distanţă egală cu cea a unei lungimi de undă, exprimată prin funcţia $\exp(-ikz)$, caracteristică unei unde plane. In planul (x,y), valoarea fazorului depinde atât de poziţia z a acestuia, cât şi de coordonatele (x,y) în care se calculează; dependenţa fazorul de distanţa de propagare z, determinată de fenomenele legate de procesul de propagare şi de cel de difracţie, este lentă atât faţă de variaţia funcţiei $\exp(-ikz)$ cât şi faţă de cea determinată de dependenţa de coordonatele de poziţie (x,y). Dependenţa de coordonate exprimă distribuţia intensităţii energetice în planul (x,y) (fig. 78 a,b).

Pentru a evidenţia această comportare, fazorul câmpului se scrie sub forma:

(2.8) $$\tilde{E}(x,y,z) = \tilde{u}(x,y,z)e^{-ikz},$$

unde $\tilde{u}(x,y,z)$ reprezintă amplitudinea complexă a unei unde scalare complexe, care, în planul (x,y), descrie forma profilului fasciculului.

Introducând forma (2.8) în ecuaţia (2.3) se obţine:

(2.9) $$\frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z} = 0.$$

Conform celor prezentate mai sus dependenţa de parametrul de propagare z a mărimii $\tilde{u}(x,y,z)$ este determinată de efectul de difracţie; mărimea acestei variaţii este mai mică decât mărimea variaţiei funcţiei $\tilde{u}(x,y,z)$ în planul (x,y). Variaţia lentă a mărimii $\tilde{u}(x,y,z)$ funcţie de z poate fi exprimată prin *aproximaţia paraxială*:

(2.10) $$\left|\frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z^2}\right| \ll \left|2\mathrm{k}\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial y^2}\right|.$$

In aceste condiţii, ecuaţia (2.9) devine:

(2.11 a) $$\frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}(x,y,z)}{\partial y^2}-2i\mathrm{k}\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z}=0,$$ sau:

(2.11 b) $$\nabla_T^2\tilde{u}(x,y,z)-2i\mathrm{k}\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z}=0.$$

(Operatoul ∇_T^2 - nabla transversal - acţionează asupra coordonatelor carteziene sau cilindrice în planul perpendicular la direcţia de propagare).

Din relaţia (2.11 b) rezultă:

$$\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{i}{2\mathrm{k}}\nabla_T^2\tilde{u}(x,y,z),$$

care poate fi integrată numeric folosind "aproximaţia diferenţelor finite"; se evaluează derivatele în planul (x,y) aflat în poziţia z, după care se efectează un pas în poziţia $z+\Delta z$, unde se rezolvă din nou pe baza rezultatelor din planul z.

Să analizăm condiţiile limită de valabilitate a acestei aproximaţii. Un fascicul de raze optice poate fi considerat ca o superpoziţie de unde plane care se propagă sub diferite unghiuri faţă de axa z. Să considerăm fazorul $\tilde{\mathrm{E}}(x,z)$ al unei componente care se propagă în planul (x,z) sub unghiul θ faţă de axa z. In acest plan variaţia transversală şi axială poate fi exprimată sub forma:

$$\tilde{\mathrm{E}}(x,z)=e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=e^{i(-x\mathrm{k}\cos\theta-z\mathrm{k}\sin\theta)}=\tilde{u}(x,z)e^{-i\mathrm{k}z},$$

unde s-a folosit exprimarea sub forma (2.8). Din această identitate rezultă:

$$\tilde{u}(x,z)=e^{[-ix\mathrm{k}\sin\theta+iz\mathrm{k}(1-\cos\theta)]}\cong\exp\left[-ix\mathrm{k}\theta+iz\mathrm{k}\frac{\theta^2}{2}\right].$$

Folosind această relaţie, pot fi calculate mărimile:

$$-i\frac{2\mathrm{k}}{\tilde{u}(x,z)}\frac{\partial\tilde{u}(x,z)}{\partial z}\cong\mathrm{k}^2\theta^2,\quad \frac{1}{\tilde{u}(x,z)}\frac{\partial^2\tilde{u}(x,z)}{\partial x^2}\cong-\mathrm{k}^2\theta^2,$$

$$\frac{1}{\tilde{u}(x,z)}\frac{\partial^2\tilde{u}(x,z)}{\partial z^2}\cong-\frac{\mathrm{k}^2\theta^4}{4},$$

de unde rezultă că variaţia de ordinul doi faţă de z a mărimii $\tilde{u}(x,z)$ este mai mică decât termenii precedenţi cu mărimea $\theta^2/4$ (unghiul θ exprimat în radiani); această mărime este mult mai mică decât unu, dacă $\theta\le 0.5\,\mathrm{rad}$ ($\theta\le 30^\circ$).

Prin urmare dacă direcţia de propagare a componentelor sub formă de unde plane formează cu axa optică un unghi $\theta\le 30^\circ$, atunci mărimea $\frac{\partial^2\tilde{u}(x,z)}{\partial z^2}$, în conformitate cu aproximaţia paraxială, va fi cel puţin cu un ordin de mărime mai mică decât ceilalţi doi termeni.

2.2 Integrala lui Huygens.

Un mod de a analiza propagarea undei paraxiale constă în a utiliza principiul Huygens, exprimat în aproximaţia Fresnel.

O soluţie exactă a ecuaţiei de undă este de forma (2.5):

$$\tilde{\mathrm{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})}{\mathrm{R}},$$

unde $\tilde{\mathrm{E}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ reprezintă câmpul în punctul $\mathbf{r}$ aflat la distanţa:

$$\mathrm{R}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

faţă de sursa dispusă în punctul $\mathbf{r}_0$, care radiază câmp *em*. Această relaţie descrie o undă sferică uniformă care diverge din sursa punctiformă S_0.

Să considerăm că sursa punctiformă este localzată în punctul (x_0,y_0,z_0) în afara axei z, dar nu departe de aceasta, şi să calculăm expresia fazorului câmpului $\tilde{\mathrm{E}}(x,y,z)$ (sau $\tilde{u}(x,y,z)$), în punctul (x,y,z) situat în planul (x,y) perpendicular la axa z, dar nu departe de aceasta. In aceste condiţii, în aproximaţia Fresnel, distanţa R se poate exprima printr-o dezvoltare în serie de puteri cu limitare la aproximaţia de ordinul doi, sub forma:

(2.12) $$\mathrm{R}=z-z_0+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}+\dots$$

La numitorul relaţiei (2.5) ne putem limita la aproximaţia de ordinul întâi.

In aproximaţia Fresnel (aproximaţia undei sferice paraxiale) soluţia (2.5) devine:

(2.13 a)

$$\widetilde{E}(x,y,z)\cong\frac{1}{z-z_0}\exp\left[-ik(z-z_0)-ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}\right]$$

(2.13 b) $$\widetilde{u}(x,y,z)\cong\frac{1}{z-z_0}\exp\left[-ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}\right].$$

Din relația (2.13 a) rezultă că dacă într-un plan (x,y), perpendicular la direcția z și situat departe de sursa de radiație, variația fazei este pătratică în (x,y), atunci unda radiată este de tip sferic. Relațiile (2.13 a,b) reprezintă o soluție exactă a ecuației de undă paraxială.

Soluțiile de tipul (2.5) sau (2.13 a,b) pot fi folosite pentru exprimarea principiului Huygens, care permite analiza modului de propagare a câmpului. Dacă este definit câmpul pe o suprafață dată, atunci fiecare punct al acestei suprafețe poate fi considerat drept o sursă elementară care radiază o undă sferică elementară ("Huygens wavlet"). Câmpul radiat de către întreaga suprafață, calculat într-un punct dat (x,y) al unui plan perpendicular la direcția de propagare z, la distanța $(z-z_0)$ este dat de interferența tuturor undelor elementare radiate de pe suprafață (integrala Huygens):

(2.14) $$\widetilde{E}(x,y,z)=\frac{i}{\lambda}\iint_{S_0}\widetilde{E}_0(x_0,y_0,z_0)\cos\theta\frac{\exp(-ik\cdot R)}{R}dS_0,$$

unde R reprezintă distanța dintre sursa elementară și punctul de observare, mărimea $\cos\theta$ reprezintă "factorul de înclinare" unde θ este unghiul dintre direcția sursă-punct de observare și normala la elementul de suprafață, iar dS_0 - aria elementului de suprafață centrat în jurul punctului (x_0,y_0,z_0). Mărimea i/λ reprezintă un factor de normare. (Relația (2.14) a fost dezvoltată ulterior de către Kirchhoff și Rayleigh-Sommerfeld).

Să aplicăm integrala Huygens în cazul fasciculului paraxial. La numitorul relației (2.14) distanța se aproximează prin $R\cong(z-z_0)$, iar argumentul exponentului prin relația (2.12):

(2.15)

$$\widetilde{E}(x,y,z)\cong$$

$$\cong\frac{ie^{-ik(z-z_0)}}{\lambda(z-z_0)}\iint_{S_0}\widetilde{E}_0(x_0,y_0,z_0)\exp\left[-ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_0)}\right]dx_0dy_0$$

(distanța $(z-z_0)$ dintre planul unde se calculează câmpul și cel unde este plasată sursa este suficient de mare astfel încât unghiul de înclinare este mai mic de $0{,}5\,\mathrm{rad}$, deci factorul de înclinare se aproximează cu unu). Din relația (2.15) se obține:

$$\widetilde{u}(x,y,z)\cong\frac{i}{\lambda L}\iint_{S_0}\widetilde{u}_0(x_0,y_0,z_0)\exp\left[-ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2L}\right]dx_0dy_0$$

(mărimea $\exp(-ikL)$ descrie variația axială a fazei frontului de undă plan).

2.3 Unde gaussiano-sferice.

Unde sferice paraxiale. Să considerăm că o undă sferică uniformă diverge dintr-o sursă punctiformă localizată în punctul (x_0,y_0,z_0) (planul (x_0,y_0) perpendicular la direcția z în punctul z_0) și este observată în punctul (x,y) localizat în planul perpendicular la direcția z în punctul de coordonată z. Dacă distanța $(z-z_0)$ este mare față de distanțele (x_0,y_0), respectiv (x,y) atunci distribuția câmpului în planul (x,y), calculată în "aproximația paraxială" este:

(2.16 a) $$\widetilde{u}(x,y,z)\cong\frac{1}{R(z)}\exp[-i\phi(x,y,z)],$$

unde: $R(z)=z-z_0$ reprezintă raza de curbură a undei sferice în punctul z, iar

(2.16 b) $$\phi(x,y,z)=\frac{\pi}{\lambda}\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{R(z)},$$

variația fazei undei în planul (x,y), perpendicular la direcția de deplasare în punctul z. Conform convenției de semn acceptată, o valoare $R>0$ indică o undă divergentă (care expandează din sursă), în timp ce $R<0$ indică o undă convergentă (se deplasează spre sursa punctiformă). Mărimile k și λ se referă la mediul în care se propagă câmpul. Variația pătratică a fazei din relația (2.16) descrie o aproximație paraxială care se referă la suprafața unei sfere; dacă ne situăm departe de axa optică, această formă conduce la erori asupra fazei. In fig. 78 a,b este prezentată grafic variația amplitudinii (a), respectiv a fazei (b) în planul (x,y), perpendicular la direcția de propagare, în cazul unei unde sferice. Din grafice rezultă că valoarea amplitudinii tinde la zero numai la distanțe foarte mari față de axa de propagare, iar variația fazei se înscrie pe o curba circulară. Din acest punct de vedere pentru a cunoaște câmpul undei sferice trebuie să cunoaște frontul de undă (de fază) precum și distribuția amplitudinii câmpului în planul (x,y) (fig. 78 c).

Unda sferică paraxială, soluție a ecuației de undă paraxială, nu descrie un *fascicul fizic real* deoarece în planul (x,y) amplitudinea nu tinde la zero în imediata apropiere a axei, ci atunci când coordonatele (x,y) tind la infinit. O asemenea undă transportă prin planul (x,y) o cantitate infinit de mare de energie.

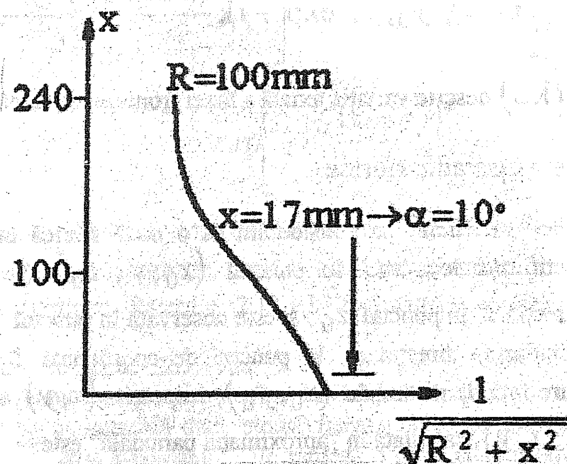


Fig. 78 a

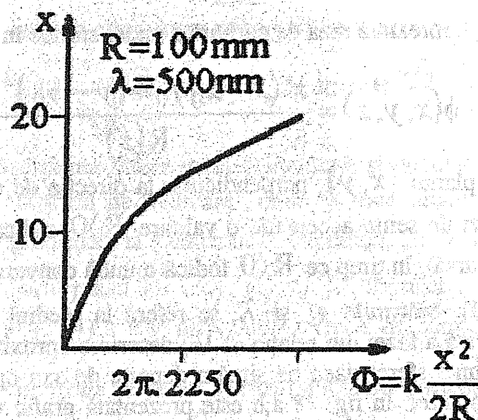


Fig.78 b

Fascicule gaussiano-sferice. Distribuția spațială a componentei electrice a câmpului *em* în modul de oscilație fundamental al rezonatorului optic evidențiază o formă asemănătoare unui "fascicul de raze aproape paralele". Forma este păstrată de către fascicul și dacă acesta părăsește cavitatea rezonatorului printr-o oglindă de capăt. Particularitățile formei se manifestă în special atunci când asupra fasciculului acționează diferite elemente optice (în special lentile sau oglinzi) sau când acesta trebuie introdus într-un rezonator pasiv (de ex. rezonatorul unui analizor spectral confocal).

Dacă acest fascicul este incident pe un ecran perpendicular la direcția de propagare (z) se observă o distribuție a intensității sub formă de spot (pată):

- spotul prezintă o simetrie circulară (deci fasciculul prezintă o simetrie cilindrică);

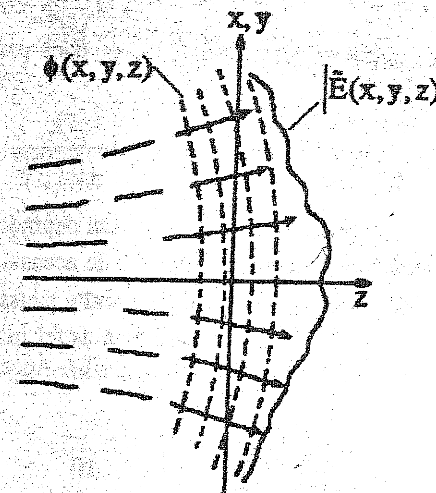


Fig. 78 c

- în planul (x, y) perpendicular la direcția de propagare, odată cu depărtarea de axa centrală, valoarea intensității locale față de cea de pe axa z se micșorează rapid tinzând spre valoarea zero. Rata descreșterii intensității funcție de valoarea x, respectiv y, sugerează o dependență descrisă de o funcție gaussiană. De aceea se introduce mărimea $w(z)$ care reprezintă depărtarea în planul (x, y) față de axa optică pentru care valoarea intensității este diminuată de e^2 ori față de cea din centrul spotului (valoarea amplitudinii câmpului scade de e ori față de valoarea acesteia în centrul spotului). In cazul modului de oscilație fundamental mărimea $w(z)$ reprezintă raza spotului în care este prezentă cea mai mare parte din energia fascicului.

- valoarea mărimii $w(z)$ depinde de poziția planului (x, y); această valoare crește odată cu creșterea valorii coordonatei z.

Pe baza acestor observații, pentru a descrie distribuția intensității în interiorul spotului modului de oscilație fundamental se poate accepta o relație de forma unei distribuții gaussiene:

(2.17 a) $$I(x, y, z) \propto \left|\tilde{E}(x, y, z)\right|^2 \exp\left[-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{w^2}\right],$$

căreia îi corespunde fazorul-amplitudine de forma:

(2.17 b) $$\widetilde{E}(x,y,z) \propto N \exp\left[-i\frac{k(x^2+y^2)}{2\widetilde{q}(z)}\right]\exp[-i\widetilde{p}(z)].$$

Forma (2.17 b) descrie un contur de tip Gauss dacă parametrul $\widetilde{q}(z)$ este de forma:

(2.18) $$\frac{1}{\widetilde{q}(z)} = -i\frac{2}{k\,w(z)^2} = -i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2}.$$

Parametrul $\widetilde{q}(z)$ este o mărime complexă, iar faptul că depinde de coordonata z face posibilă exprimarea dependenței dimensiunii spotului de această coordonată. Parametrii $\widetilde{q}(z)$ şi $\widetilde{p}(z)$ trebuie să descrie caracteristicile fascicului gaussian prezentate mai sus.

Forma acestor parametrii trebuie determinată astfel încât expresia (2.17 b) să reprezinte o soluție a ecuației de undă paraxială (2.11 b). Acceptând forma (2.17 b) a câmpului electric, se obțin relațiile:

$$\frac{\partial \widetilde{E}(x,y,z)}{\partial z} =$$

$$= -iN\left[\frac{d\widetilde{p}(z)}{dz} - \frac{k(x^2+y^2)}{2\widetilde{q}^2(z)}\frac{d\widetilde{q}(z)}{dz}\right]\exp\left[-i\frac{k(x^2+y^2)}{2\widetilde{q}(z)}\right]\exp[-i\widetilde{p}(z)],$$

$$\frac{\partial^2 E(x,y,z)}{\partial x^2} = -N\left[\frac{ik}{\widetilde{q}(z)} - \frac{k^2x^2}{\widetilde{q}^2(z)}\right]\exp\left[-i\frac{k(x^2+y^2)}{2\widetilde{q}(z)}\right]\exp[-i\widetilde{p}(z)],$$

care, introduse în ecuația de undă paraxială (2.11 b), conduc la ecuația:

$$N\left\{\frac{k^2(x^2+y^2)}{\widetilde{q}^2(z)}\left[\frac{d\widetilde{q}(z)}{dz} - 1\right] + 2k\left[\frac{d\widetilde{p}(z)}{dz} + \frac{i}{\widetilde{q}(z)}\right]\right\}\times$$

$$\exp\left[-i\frac{k(x^2+y^2)}{2\widetilde{q}(z)}\right]\exp[-i\widetilde{p}(z)] = 0$$

Forma (2.17 b) reprezintă o soluție a ecuației de undă paraxială, dacă funcțiile $\widetilde{p}(z)$ şi $\widetilde{q}(z)$ sunt soluții ale ecuațiilor:

(2.19) a) $$\frac{d\widetilde{q}(z)}{dz} = 1,$$ b) $$\frac{d\widetilde{p}(z)}{dz} = -\frac{i}{\widetilde{q}(z)}.$$

Din ecuația (2.19 a) rezultă:

(2.20) $$\widetilde{q}(z) = z + \widetilde{q}_0,$$

unde valoarea $\widetilde{q}_0 = \widetilde{q}(0)$ se obține din condiția inițială (valoarea funcției $\widetilde{q}(z)$ pentru coordonata $z = 0$). Din relația (2.19 b), considerând relația (2.20), se obține:

$$d\widetilde{p}(z) = -\frac{i}{\widetilde{q}(z)}dz = -i\frac{d[\widetilde{q}(z)]}{\widetilde{q}(z)},$$

de unde: $$\widetilde{p}(z) = -i\ln\widetilde{q}(z) + C.$$

Mărimea C reprezintă constanta de integrare, care se determină din condiția inițială:

$$\widetilde{p}(0) = 0,$$ de unde: $C = i\ln\widetilde{q}_0$, deci:

(2.21) $$\widetilde{p}(z) = -[i\ln\widetilde{q}(z) + i\ln\widetilde{q}_0] = -i\ln\frac{z+\widetilde{q}_0}{\widetilde{q}_0}.$$

Parametrul $\widetilde{q}(z)$, fiind o funcție complexă, poate fi scris sub forma:

(2.22) $$\frac{1}{\widetilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2},$$

unde funcțiile $R(z)$ şi $w(z)$ reprezintă mărimi reale.

Folosind relațiile (2.21) şi (2.22) se poate scrie:

(2.23) $$\exp[-i\widetilde{p}(z)] = \exp\left[-\ln\frac{z+\widetilde{q}_0}{\widetilde{q}_0}\right] = \frac{\widetilde{q}_0}{z+\widetilde{q}_0} = \frac{1}{1+\frac{z}{R_0} - i\frac{\lambda z}{w_0^2}},$$

unde mărimile R_0 şi w_0 reprezintă valorile mărimilor $R(z)$ şi $w(z)$ în punctul de coordonată $z = 0$. Dacă se cunosc valorile mărimilor R_0 şi w_0, atunci valorile $R(z)$ şi $w(z)$ se pot calcula pentru orice valoare a coordonatei z. Deoarece fixarea coordonatei $z = 0$ este arbitrară, se alege planul $z = 0$ pentru care raza de curbură reală a frontului de undă (de fază) este $R_0 \to \infty$; în acest caz relația (2.22) este identică cu relația (2.17).

In aceste condiții, folosind relația (2.20), se pot stabili expresiile mărimilor $R(z)$ şi $w(z)$:

$$\frac{1}{\widetilde{q}(z)} = \frac{\frac{1}{\widetilde{q}_0}}{1+\frac{z}{\widetilde{q}_0}} = \frac{\frac{1}{z}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2 + i\frac{\lambda}{\pi w_0^2}}{1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2},$$

de unde rezultă:

(2.24) a) $w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right)^2}$, b) $R(z)=z+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2\frac{1}{z}$.

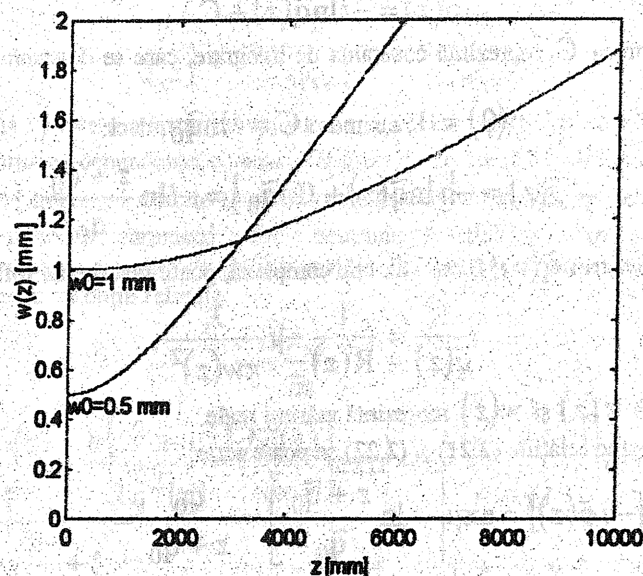


Fig. 79 a

Relaţia (2.24 a) descrie dependenţa dimensiunii spotului fasciculului gaussian de localizarea (z) a planului (x,y) perpendicular la direcţia de propagare a fasciculului. Din această relaţie rezultă că rata expandării dimensiunii spotului depinde de dimensiunea "taliei" fasciculului. Dacă mărimea w_0 este mică rata este rapidă şi invers. Expandarea este determinată de fenomenul de difracţie, deoarece mărimea w_0 reprezintă o "limitare" a dimensiunii fasciculului. Această relaţie este prezentată grafic în fig. 79 a.

Deoarece la o depărtare relativ mică faţă de "talie" rata expandării este mică, pe acest interval fasciculul poate fi considerat drept un "fascicul de raze aproape paralele". Pentru a delimita acest domeniu se consideră de ambele părţi ale "taliei" distanţa z_R pentru care dimensiunea fasciculului creşte de $\sqrt{2}$ ori (suprafaţa spotului se dublează). Pentru această distanţă, din relaţia (2.24 a), se obţine:

(2.25) $$z=z_R=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}.$$

Distanţa z_R delimitează aşa numitul *domeniu Rayleigh*. Această denumire este folosită în teoria antenelor pentru a marca distanţa $z\cong\frac{d^2}{\lambda}$ parcursă de un fascicul de radiaţie *em*, generat de o antenă cu diametrul aparturii egal cu d, unde $d\rangle\rangle\lambda$, înainte ca acesta să prezinte o divergenţă puternică. Pe această distanţă fasciculul poate fi considerat drept un "fascicul de raze aproape paralele". Distanţa Rayleigh , pentru un fascicul gaussian, reprezintă o "linie de demarcare" între aşa numitul *"câmp apropiat"* sau *câmpul Fresnel* şi *"câmpul îndepărtat"* sau *câmpul Fraunhofer*.

Distanţa dintre planele dispuse deoparte şi de cealaltă a "taliei" fasciculului, în care dimensiunea fasciculului este egală cu $\sqrt{2}w_0$, este cunoscută sub denumirea de *parametru confocal*, fiind dată de relaţia:

(2.26) $$b=2z_R=\frac{2\pi w_0^2}{\lambda}.$$

Pe acest domeniu fasciculul poate fi considerat drept un "fascicul de raze aproape paralele".

Relaţia (2.24 b) $R(z)=z+\frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2}\frac{1}{z}=z+\frac{z_0^2}{z}$, evidenţiază dependenţa de parametrul z a razei reale de curbură a frontului de undă localizat la distanţa z faţă de "talie". Această dependenţă este diferită în "câmpul apropiat" faţă de "câmpul îndepărtat":

$$R(z)=z+\frac{z_R^2}{z}\cong\begin{cases}\infty & z\langle\langle z_R\\ 2z_R & z=z_R\\ z & z\rangle\rangle z_R\end{cases},$$

comportarea fiind prezentată în fig. 79 b. Exact la nivelul "taliei", frontul de undă este plan ($R(z)\to\infty$, centrul de curbură fiind dispus la $z\to-\infty$). Odată cu propagarea fasciculului (distanţare faţă de "talie") frontul de undă se curbează, deci raza de curbură, care depinde de poziţionarea frontului de undă faţă de "talie" începe să se micşoreze tinzând spre valoarea $R(z_R)=2z_R$ (în acest caz centrul de curbură este dispus în poziţia $z=-z_R$). La propagarea ulterioară a fasciculului (poziţia frontului de undă $z\rangle z_R$), raza de curbură tinde să devină egală cu valoarea z, deci centrul de curbură tinde să se localizeze în planul $z=0$, pe axa optică, undele sferice devenind aproape concentrice; pentru $z\to+\infty$, centru de curbură este localizat în planul $z=0$.

Valoarea minimă a razei de curbură $R(z_R)=2z_R$ corespunde cazului când frontul de undă este localizat în poziţia $z=+z_R$, iar centru de curbură în poziţia $z=-z_R$, deci într-o poziţie simetrică, adică pe suprafaţa frontului de undă dacă fasciculul se propagă în sensul $z \rightarrow -\infty$. In teoria rezonatorilor stabili acest caz reprezintă aşa numitul rezonator simetric confocal, de unde şi denumirea de *parametru confocal*. In acest caz "talia" este dispusă în planul de simetrie al rezonatorului şi prezintă valoarea cea mai mică.

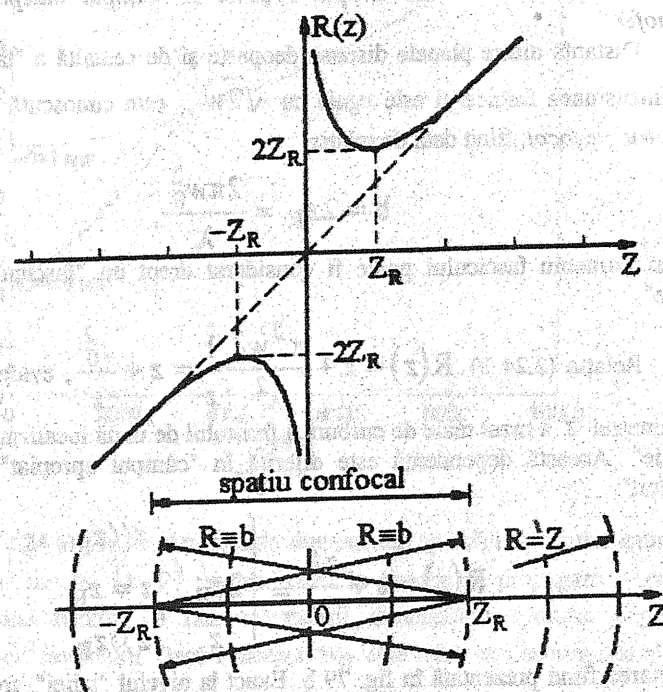


Fig. 79 b

In domeniul "câmpului îndepărtat", unde este îndeplinită condiţia $z \rangle\rangle z_R$, expresia razei reale de curbură, precum şi cea a dimensiunii spotului devin:

(2.24') a) $w(z)=\dfrac{w_0}{z_R}z=\dfrac{\lambda}{\pi w_0}z$, respectiv: b) $R(z)\cong z$.

Aceste expresii evidenţiază faptul că în acest domeniu, pe de o parte undele sferice sunt aproape concentrice, centrul de curbură fiind dispus pe axa optică în planul $z=0$, iar pe de altă parte creşterea dimensiunii spotului este proporţională cu distanţa z. Din relaţia (2.24' a) rezultă că pentru "câmpului îndepărtat" se poate defini unghiul de divergenţă a fasciculului (unghiul format de axa optică cu tangenta la curba locului geometric al punctelor unde amplitudinea câmpului se micşorează de e ori faţă de cea de pe axa optică):

(2.25) $$\tan\theta=\frac{w(z)}{z}=\frac{\lambda}{\pi w_0},$$

relaţie ce confirmă observaţia că divergenţa fasciculului este mai mare dacă dimensiunea "taliei" este mai mică. Relaţia (2.25) aminteşte de unghiul de difracţie al unui fascicul de raze paralele pe o deschidere circulară de rază r:

$$\theta=0{,}61\frac{\lambda}{r},$$

adică divergenţa fascicului gaussian este de acelaşi ordin de mărime cu cea asociată divergenţei unui fascicul de raze paralele difractat de o deschidere circulară cu raza $r\cong w_0$, localizată în planul "taliei".

Relaţia (2.23) poate fi scrisă sub forma:

(2.26 a) $$\exp[-i\tilde{p}(z)]=\frac{1}{1+i\dfrac{z}{z_0}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^2}}e^{i\phi(z)},$$ unde:

(2.26 b) $$\tan\phi(z)=\frac{z}{z_0}.$$

Conform relaţiei (2.26 b), propagarea fascicului gaussian de ordin inferior implică, pe lângă variaţia dimensiunii spotului şi a razei reale de curbură, şi o variaţie suplimentară a fazei. Dacă variaţia fazei se analizează în raport de planul $z=0$ (planul "taliei" fasciculului) considerat drept referenţial, faţă de variaţia fazei undei plane $\left(e^{-ikz}\right)$ de-a lungul direcţiei de propagare, în cazul fasciculului gaussian apare o variaţie suplimentară, care este prezentată în fig. 80. Valoarea variaţiei suplimentare a fazei se află în domeniul $\left(-\dfrac{\pi}{2}\div 0\div +\dfrac{\pi}{2}\right)$ (variaţia totală este egală cu π), rata cea mai rapidă a variaţiei se află în domeniul parametrului confocal $\left(-z_R \div +z_R\right)$.

Din punct de vedere fizic variaţia suplimentară a fazei evidenţiază micşorarea constantei efective de propagare axială ($k_{ef}(z)=k-\Delta k$), în special în domeniul parametrului confocal, corespunzător viteza de fază este mai mare ($v_{ef}(z)=c+\Delta v$) sau distanţa dintre fronturile de fază este mai mare faţă de cazul undelor sferice.

Variaţia suplimentară a fazei rezultă din ecuaţia paraxială de undă:

$$\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{i}{2\mathrm{k}}\nabla^2_{xy}\tilde{u}(x,y,z).$$

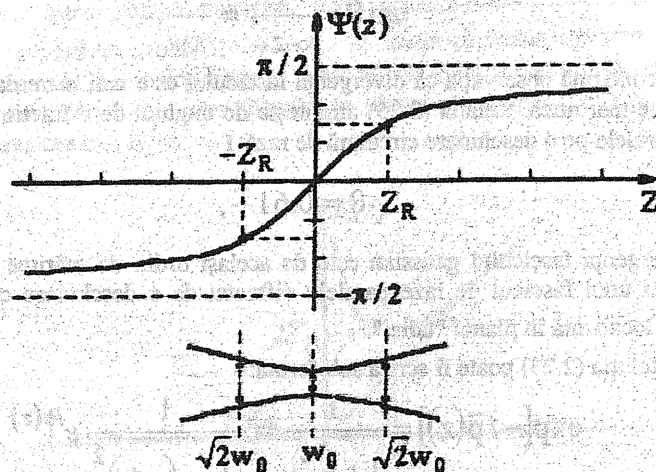


Fig. 80

Din punct de vedere fizic variația suplimentară a fazei evidențiază micșorarea constantei efective de propagare axială ($\mathrm{k}_{ef}(z)=\mathrm{k}-\Delta\mathrm{k}$), în special în domeniul parametrului confocal, corespunzător viteza de fază este mai mare ($\mathrm{v}_{ef}(z)=\mathrm{c}+\Delta\mathrm{v}$) sau distanța dintre fronturile de fază este mai mare față de cazul undelor sferice.

Variația suplimentară a fazei rezultă din ecuația paraxială de undă:

$$\frac{\partial\tilde{u}(x,y,z)}{\partial z}=-\frac{i}{2\mathrm{k}}\nabla^2_{xy}\tilde{u}(x,y,z).$$

Derivata transversală de ordinul doi, prin intermediul acestei ecuații, conduce la o variație suplimentară a fazei pe unitate de lungime.

Acest rezultat reprezintă efectul Guoy de variație suplimentară a fazei la trecerea unui fascicul prin zona focală. Efectul a fost evidențiat atât în domeniul optic cât și cel al microundelor.

Folosind relația (2.16 b), fazorul componentei electrice devine:

(2.27)

$$\tilde{\mathrm{E}}_0(x,y,z)=N\frac{e^{i\phi(z)}}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}}\exp\left[-i\frac{\mathrm{k}\left(x^2+y^2\right)}{2\mathrm{R}(z)}\right]\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right],$$

unde N reprezintă factorul de normare.

Dacă relația (2.27) se multiplică cu factorul $e^{-i\mathrm{k}z}$, se obține forma explicită a relației (2.8), soluție a ecuației de undă, dacă sunt îndeplinite condițiile (2.10) de fascicul paraxial.

Distribuția intensității energetice într-un punct al spotului fasciculului gaussian este dată de relația:

(2.28)

$$I(x,y,z)=\frac{\mathrm{c}\varepsilon_0}{2}\left|\tilde{\mathrm{e}}(x,y,z)\right|^2=\frac{|N|^2}{\mathrm{c}\mu_0\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]}\exp\left[-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{w(z)^2}\right]=$$

$$=\frac{|N|^2}{\mathrm{c}\mu_0}\frac{w_0^2}{w(z)^2}\exp\left[-\frac{2\mathrm{r}^2}{w(z)^2}\right]$$

Factorul N se determină din condiția de normare: valoarea cantității de energie care traversează un plan infinit extins, perpendicular la direcția de propagare, este egală cu unitatea, deci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I(x,y,z)dxdy=\frac{\mathrm{c}\varepsilon_0|N|^2}{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{w(z)^2}}dxdy=$$

$$=\frac{\mathrm{c}\varepsilon_0|N|^2}{4}\left(\pi w_0^2\right)=1$$

de unde:

(2.29)
$$|N|^2=\frac{4}{\mathrm{c}\varepsilon_0\pi w_0^2}.$$

Din relația (2.28) rezultă că la distanțe mari față de planul "taliei" fasciculului distribuția intensității energetice este proporțională cu mărimea $\left(\frac{1}{z^2}\right)$:

(2.30)

$$I(x,y,z)\cong\frac{z_0^2}{z^2}\frac{2}{\pi w_0^2}\exp\left[-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{w(z)^2}\right]=\frac{I_0 z_0^2}{z^2}\exp\left[-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{w(z)^2}\right],$$

unde: $I_0 = \frac{c\varepsilon_0}{2}|N|^2 = \frac{2}{\pi w_0^2}$.

Prezintă interes valoarea câmpului electric la distanțe mari față de "talie":

(2.31)

$$\tilde{E}(x,y,z) =$$

$$= \frac{Nz_0}{z}\exp\left[-i\left(kz+\frac{\pi}{2}\right)\right]\exp\left[-i\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}\right]\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right].$$

In aceste condiții relația (2.24 a) conduce la $R(z) \cong z$, deci:

(2.31')

$$\tilde{E}(x,y,z) = -iNz_0\left\{\frac{\exp[-ikz]}{z}\exp\left[-i\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2z}\right]\right\}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right].$$

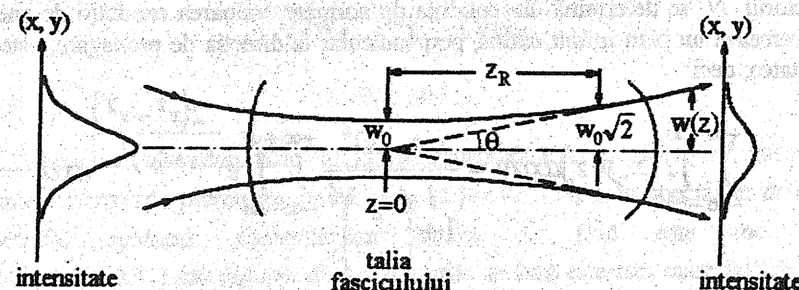


Fig. 81

Factorul din paranteză reprezintă forma (2.7) a unei unde sferice cu centrul de curbură localizat în planul "taliei" în punctul $z = 0$. Pentru puncte apropiate de axa fasciculului, deoarece $\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right] \cong 1$, expresia (2.31') are exact forma unei unde sferice. De aceea câmpul fasciculului definit prin relația (2.31') este denumit și *undă sferică gaussiană*.

In fig. 81 sunt prezentate grafic caracteristicile fasciculului gaussiano-sferic. Cele două curbe dispuse de-a lungul axei optice reprezintă locul geometric al punctelor din planul (x,y) unde valoarea energiei scade de e^2 ori față de cea de pe axul optic (valoarea amplitudinii scade de e ori). Raza de curbură a frontului de fază este diferită în "*câmpul apropiat*" față de "*câmpul îndepărtat*". De asemenea este marcat unghiul de divergență al fasciculului pentru "*câmpul îndepărtat*".

Raza de curbură la stânga "taliei" se consideră negativă, corespunzător suprafața de fază constantă este în direcția de propagare. Câmpul, exceptând constanta N, este complet determinat de lungimea de undă λ și dimensiunea w_0 a "taliei" fasciculului. Pentru o lungime de undă și o valoare w_0 date, în orice punct, se pot determina dimensiunea spotului și raza de curbură. Prin urmare un fascicul gaussian de radiație armonică este complet determinat prin trei parametrii: w_0, localizarea "taliei" și amplitudinea câmpului.

Valoarea parametrului w_0 trebuie să fie mai mare decât cea a lungimii de undă. Această restricție rezultă din cerința câmpului de a satisface condițiile (2.10), impuse la deducerea ecuației de undă paraxială, adică soluția (5.2) este valabilă în aproximația în care a fost dedusă. Restricția implica faptul că unghiul de divergență al fasciculului trebuie să fie mic, adică fasciculul să fie paraxial.

3. Rezonatori optici stabili

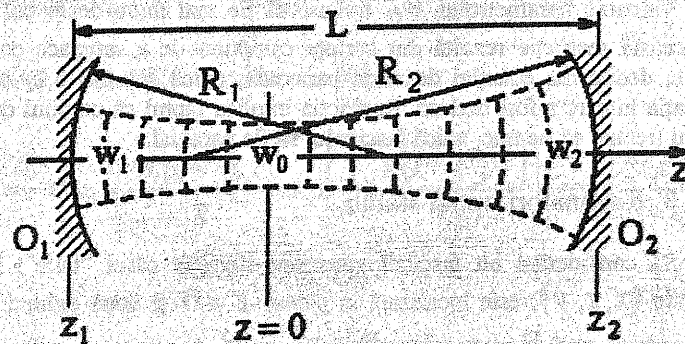
Să considerăm un fascicul gaussiano-sferic a cărui "talie", în sistemul de coordonate (x,z,y), este localizată în planul $z = 0$ și două oglinzi sferice a căror rază de curbură sunt R_1, respectiv R_2. Pe axa z de propagare a fasciculului gaussian există două puncte z_1, respectiv z_2, situate la distanța L unul de celălalt, unde razele reale ale fasciculului sunt egale cu razele de curbură ale oglinzilor.

Dacă în aceste puncte se plasează cele două oglinzi în așa fel încât planul tangent în vârful lor este perpendicular la axa z, atunci frontul de undă al fasciculului gaussian se "cuplează" cu suprafața de curbură a oglinzilor (fig. 82 b). Dacă diametrul oglinzilor este mult mai mare decât diametrul spotului fasciculului la nivelul oglinzilor ($a_1, a_2 \rangle\rangle w_1, w_2$), atunci perturbarea câmpului determinată de fenomenul de difracție la nivelul oglinzilor, poate fi neglijată. Dacă dimensiunile oglinzilor sunt mai mici decât dimensiunile spotului la nivelul oglinzii câmpul *em* din rezonator se "scurge" pe lângă oglinzi (iese din cavitate).

Vectorul de undă la nivelul frontului de undă (de fază) este perpendicular la suprafața oglinzilor, iar prin reflexie oglinzile returnează fasciculul pe direcția de incidență. Această situație are loc și la nivelul cele de a doua oglinzi. In acest mod se poate considera că cele două oglinzi formează o "capcană" pentru fasciculul gaussian prezent în cavitatea delimitată de cele două oglinzi. Intr-un punct dat al spațiului din cavitate acționează cele două câmpuri *em* reflectate de oglinzi, care se propagă în sensuri opuse. In anumite condiții, interferența acestor câmpuri conduce la formarea unui sistem de *unde staționare*.

Pentru a analiza comportarea unui rezonator optic să considerăm problema inversă: fiind date două oglinzi sferice O_1 și O_2, cu razele de curbură R_1 și R_2, distanța dintre vârfurile lor fiind egală cu L (lungimea rezonatorului) să calculăm parametrii fasciculului gaussiano-sferic ale cărui raze reale de curbură ale frontului de

undă (fază) sunt egale cu R_1, respectiv R_2. Presupunem că dimensiunea spotului "taliei" este egală cu w_0 (o mărime necunoscută), căruia îi corespunde domeniul Rayleigh $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$, iar oglinzile sunt localizate în punctele z_1, respectiv z_2 față de poziția $z = 0$ a "taliei" fasciculului (poziții necunoscute) (fig. 82 a).



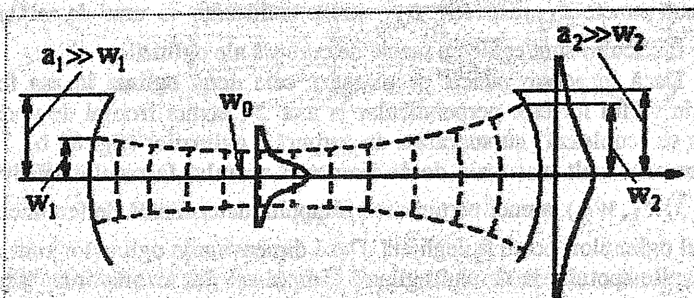


Fig. 82 a,b

Pe baza condiției de coincidență a razei de curbură a oglinzii cu cea a frontului de undă se pot scrie relațiile:

(3.1) a) $R(z_1) = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} = -R_1$, b) $R(z_2) = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} = +R_2$,

c) $L = z_2 - z_1$.

(Semnul "minus" este solicitat de convenția de semne).

Ecuațiile (3.1) permit calculul mărimilor z_1, z_2 și z_R, ale căror expresie, dacă se introduc mărimile adimensionale cunoscute sub denumirea de "*parametrii* g *ai rezonatorului*":

(3.2) $$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

au forma:

(3.3) a) $z_1 = \frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2}L$, b) $z_2 = \frac{g_1(1-g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2}L$

c) $z_R^2 = \frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}L^2$.

Folosind relațiile (2.23 b, 2.24), "talia" fasciculului (w_0) și dimensiunile spotului fasciculului gaussian la nivelul oglinzilor (w_1, respectiv w_2) se pot exprima funcție de parametrii rezonatorului:

(3.4) $$w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)}}, \quad w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)}}.$$

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}}$$

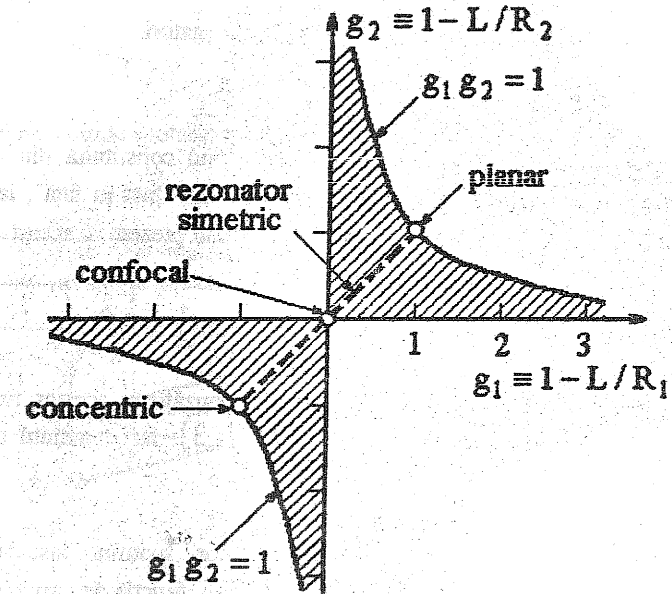


Fig. 83

Din relațiile (3.4 a,b,c) rezultă că mărimile w_0, w_1 și w_2 prezintă valori finite dacă parametrii g_1 și g_2 satisfac relația cunoscută sub denumirea de *"condiție de stabilitate"*:

(3.5) $$0 \le g_1 g_2 \le 1.$$

Această relație poate fi reprezentată grafic într-un sistem de coordonate $(g_1 g_2)$, grafic cunoscut sub denumirea de *"diagramă de stabilitate"* (fig. 83). Din relațiile (3.2) rezultă că un rezonator optic (mărimile R_1, R_2 și L sunt date) este definit de parametrii g_1 și g_1. Prin urmare se poate realiza o corespondență *biunivoca* între un rezonator dat și un punct (g_1, g_2) din diagrama de stabilitate. Dacă punctul este dispus în domeniul hașurat al diagramei, atunci rezonatorul este *"stabil din punct de vedere optic"*, adică dimensiunile spotului fascicului gaussian la nivelul oglinzilor sunt finite; se pot realiza oglinzi cu diametru finit dar mai mare decât dimensiunile spotului pentru a înlătura fenomenul de "scurgere a energiei". Dacă punctul este dispus în domeniul nehașurat, atunci dimensiunile spotului tind la infinit, iar rezonatorul este *nestabil* pentru fasciculul gaussian din cavitatea optică realizată.

Diagrama de stabilitate depinde numai de parametrii rezonatorului, fiind independentă de lungimea de undă a radiației ce formează modul de oscilație, cât și de dimensiunile transversale ale acestuia.

In continuare sunt analizate câteva tipuri de rezonatori.

3.1 Rezonatori simetrici.

Reprezintă configurația cea mai simplă, fiind constituită din două oglinzi sferice identice $(R_1 = R_2 = R)$, dispuse cu curburile "față în față", la distanța L între vârfuri (fig. 82). Caracteristicile fascicului gaussian prezent în această configurație sunt:

(3.6) $$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{1+g}{4(1-g)}}, \text{ respectiv: } w_1^2 = w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{1}{1-g^2}}.$$

In diagrama de stabilitate, punctele corespunzătoare acestor rezonatori sunt dispuse de-a lungul bisectoarei unghiului diedru $(1,3)$, iar domeniul de variație al mărimii g este:

$$-1 \le g \le +1.$$

In fig. 84 este prezentată variația dimensiunilor spotului fascicului gaussian (w_0, w_1, w_2), pentru o lungime dată a rezonatorului, funcție de variația parametrului g (variația razei de curbură a oglinzilor).

Rezonator simetric confocal. Rezonatorul care corespunde punctului central al diagramei de stabilitate $(g_1 = g_2 = 0)$ este caracterizat prin valorile

$R_1 = R_2 = L$, adică centrul de curbură al unei oglinzi este situat pe suprafața celeilalte (punctele focale ale oglinzilor coincid, fiind situate în poziția $L/2$ față de suprafața oglinzilor), iar distanța dintre oglinzi este egală cu dublul lungimii domeniului Rayleigh caracteristic fascicului gaussian rezonant din cavitate (fig. 85).

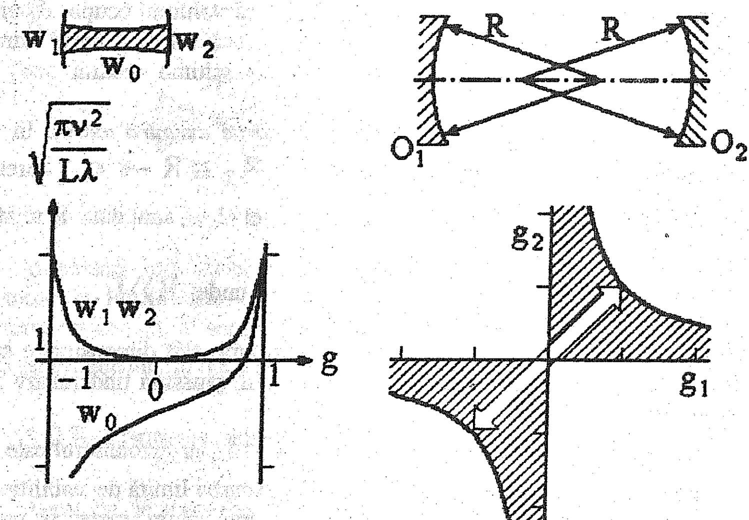


Fig. 84

Dimensiunile spotului fascicului gaussian sunt date de relațiile:

(3.7) $$w_0^2 = \frac{L\lambda}{2\pi}, \quad w_1^2 = w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} = 2w_0^2$$

și prezintă valorile cele mai mici ce se pot obține într-un rezonator (deși în unii rezonatori, într-un singur punct, se pot obține valori și mai mici).

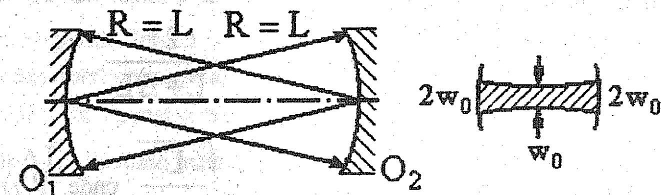


Fig. 85

Avantajul acestei cavități constă în faptul că este puțin sensibilă la dezalinierea oglinzilor rezonatorului. Dacă una din oglinzi se rotește în jurul axei x sau y, centrul de curbură al acesteia rămâne localizat pe suprafața celeilalte, iar deplasarea axei optice a rezonatorului este foarte mică. De asemenea faptul că dimensiunile spotului la nivelul

oglinzilor sunt mici asigură o valoare mică a pierderilor prin fenomenul de difracție. Din această cauză acest tip de rezonator este utilizat pentru testarea preliminară a "mediilor active" necunoscute. Structura este utilă atunci când se fac măsurători asupra puterii (energiei) care poate fi extrasă de la un mediu activ dat, fără a impune condiții deosebite de aliniere.

Dezavantajul acestei cavități constă în faptul că volumul ocupat de un mod de oscilație este mic (dimesiunea medie a spotului este mică), deci puterea extrasă de la mediul activ, prin fenomenele forțate, este mică. In schimb mediul activ poate fi acoperit cu mai multe moduri de oscilație.

Rezonatori aproape-planari (oglinzi cu rază de curbură mare). In acest caz lungimea rezonatorului este finită, dar $R_1 \cong R_2 \cong R \to \infty$, corespunzător $g_1 \cong g_2 \cong 1$. Dimensiunile spotului, conform relației (3.6), sunt date de relațiile:

(3.8) $$w_0^2 \cong w_1^2 \cong w_2^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{R}{2L}}, \text{ unde: } R \rangle\rangle L.$$

In acest caz, odată cu creșterea razei de curbură, atât dimensiunile spotului la nivelul oglinzilor cât și dimensiunea "taliei" fascicului gaussian tind relativ încet spre valori foarte mari (fig. 84).

Dacă oglinzile sunt plane, atunci $g_1 = g_2 = 1$, iar rezonatorul este marcat în diagrama de stabilitate printr-un punct dispus chiar pe curba limită de stabilitate.

Deși rezonatorii aproape-planari prezintă un volum mare al modului de oscilație, totuși, în realizarea schemelor de cavități optice pentru laseri, sunt evitați din cauza dificultăților de aliniere a oglinzilor și de stabilitate mecanică a rezonatorului. Este dificil să se mențină axa optică a rezonatorului, determinată de centrele de curbură a celor două oglinzi, aliniată cu axa mediului activ. De asemenea este dificilă fabricarea și testarea oglinzilor cu rază de curbură mare, ceea ce ridică prețul de cost al produsului.

Rezonatori aproape-concentrici. In zona celuilalt capăt al bisectoarei diagramei de stabilitate $(g_1 = g_2 = -1)$ sunt dispuși rezonatorii aproape-concentrici. Considerăm că lungimea cavității, egală cu L, este mai mică cu mărimea ΔL decât suma razelor de curbură ale oglinzilor:

$$R = \frac{L+\Delta L}{2}, \text{ deci: } g = 1 - \frac{2L}{L+\Delta L}.$$

De unde rezultă:

(3.9) $$w_0^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta L}{4L}}, \; w_1^2 \cong w_2^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{L}{4\Delta L}}, \text{ unde: } R \rangle\rangle L.$$

In cazul acestui rezonator raza de curbură a oglinzilor este acceptabilă din punct de vedere a realizării acestora, iar dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor poate fi variată printr-o mișcare fină de translație a unei oglinzi (fig. 86). Prin variația fină a mărimii ΔL poziționarea rezonatorului în diagrama de stabilitate poate fi adusă chiar pe curba de stabilitate, dar dimensiunea "taliei" fascicului gaussian tinde spre valoare zero, ceea ce nu este util în special pentru extragerea din cavitate a "puterii laser".

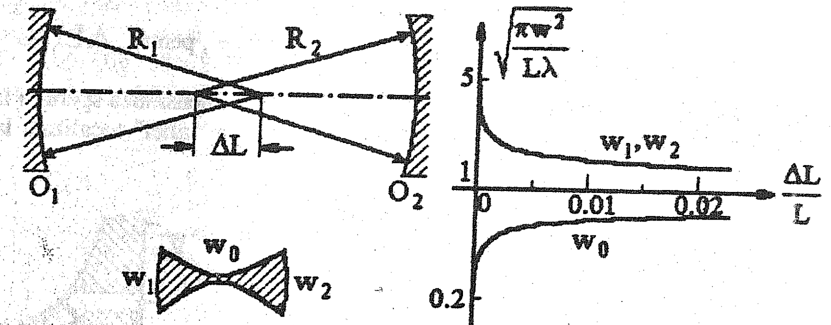


Fig. 86

In același timp centrele de curbură ale celor două oglinzi tind să se suprapună, astfel încât la limită cele două oglinzi aparțin aceleași sfere. Din această cauză rezonatorul devine foarte sensibil la alinierea oglinzilor (variații mari ale deplasării axei optice a rezonatorului, la deplasarea (x, y) a oglinzilor).

3.2 Rezonatori *semi*simetrici

Acest tip de rezonator este constituit dintr-o oglindă plană $(R_1 = \infty)$ și una sferică, deci: $g_1 = 0$ și $g_2 = 1 - \frac{L}{R}$, fiind echivalent cu jumătate dintr-un rezonator simetric (care este de două ori mai lung). "Talia" fascicului gaussian este localizată pe oglinda plană, iar dimensiunile spotului sunt:

(3.10) $$w_0^2 = w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g}{1-g}}, \text{ respectiv: } w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{1}{g(1-g)}},$$

unde domeniul de variație al parametrului g este $0 \le g \le +1$ (în diagrama de stabilitate corespunde dreptei delimitată de punctele $(1,0)$ și $(1,1)$) (fig. 87).

Rezonatori aproape-semisferici sau semi-concentrici. Reprezintă o schemă utilizată mult în construcția laserilor. Sunt caracterizați prin $R_1 = \infty$ și $R_2 = L + \Delta L$, de unde rezultă:

$$g_1 = 1 \text{ și } g_2 = 1 - \frac{L+\Delta L}{L} \cong \frac{\Delta L}{L} \cong 0.$$

Este asemănător cu un rezonator aproape-simetric cu dimensiunile spotului date de relațiile:

(3.11) $w_0^2 = w_1^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta L}{L}}, \quad w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{L}{\Delta L}}$, pentru: $\Delta L \langle\langle L$.

Prin reglarea fină a lungimii rezonatorului se poate varia dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor, dar în același timp se micșorează dimensiunea "taliei" localizată la nivelul oglinzii plane (fig. 88).

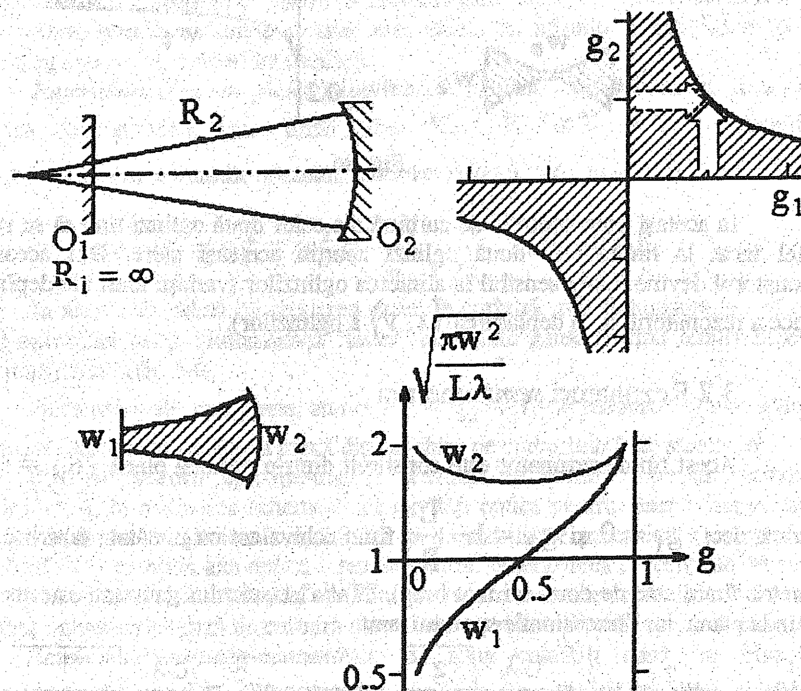


Fig. 87

Rezonatori aproape-semisferici sau semi-concentrici. Reprezintă o schemă utilizată mult în construcția laserilor. Sunt caracterizați prin $R_1 = \infty$ și $R_2 = L + \Delta L$, de unde rezultă:

$$g_1 = 1 \text{ și } g_2 = 1 - \frac{L+\Delta L}{L} \cong \frac{\Delta L}{L} \cong 0.$$

Este asemănător cu un rezonator aproape-simetric cu dimensiunile spotului date de relațiile:

(3.11) $w_0^2 = w_1^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta L}{L}}, \quad w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{L}{\Delta L}}$, pentru: $\Delta L \langle\langle L$.

Prin reglarea fină a lungimii rezonatorului se poate varia dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor, dar în același timp se micșorează dimensiunea "taliei" localizate la nivelul oglinzii plane (fig. 88). Schema este puțin sensibilă la micile dezalinieri ale oglinzilor (dezalinieri care intră în posibilitățile mecanice de fabricare).

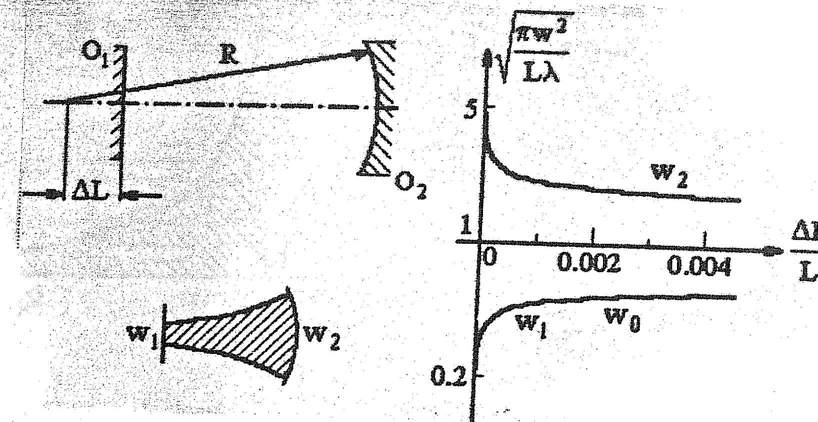


Fig. 88

Din punct de vedere constructiv, în special în cazul laserilor cu gaz, oglinzile rezonatorului pot fi aplicate direct pe capetele tubului de descărcare, preluând rolul ferestrelor de capăt, sau sunt în afara tubului, capetele acestuia fiind închise cu ferestre de tip Brewster.

In primul caz trebuie asigurate condițiile:

- lungimea L a tubului de descărcare trebuie să fie mai mare decât raza (R) de curbură a oglinzii cu mărimea ΔL calculată pentru a obține o dimensiune dată a spotului la nivelul oglinzii. In timpul prelucrării mecanice se poate asigura precizia determinării mărimii ΔL;
- capetele tubului trebuie prelucrate în așa fel încât normalele la cele două suprafețe să fie coliniare și coliniare cu axa tubului. Această cerință poate fi asigurată din punct de vedere mecanic;
- oglinda sferică poate fi aliniată față de normala la oglinda plană sau față de axa tubului, fie prin rotirea în planul (x, y), fie prin translare perpendiculară pe axa tubului. Metoda translației se realizează ușor din punct de vedere mecanic.

In cazul laserilor cu oglinzi externe, din punct de vedere mecanic, se poate asigura atât alinierea oglinzilor, prin rotire în planul (x, y), cât și deplasarea fină a unei oglinzi pentru a realiza o variație fină a lungimii rezonatorului. Pentru a asigura rotirea fină se utilizează așa numitele "micrometre diferențiale"

3.3 Rezonator concav-convex.

Dacă diametrul mediului activ este mare, folosind schemele prezentate, nu se poate extrage în mod eficient energia înmagazinată în mediul activ. S-ar putea utiliza scheme de rezonatori optici poziţionate în diagrama de stabilitate la marginea acesteia, dar aceştia sunt foarte sensibili la alinierea rezonatorului.

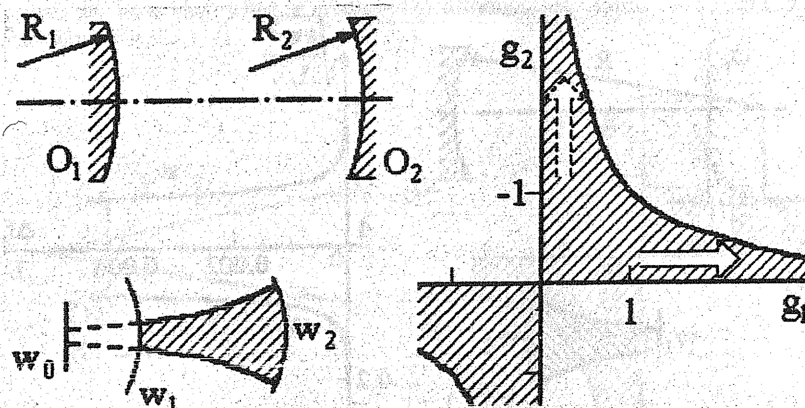


Fig. 89

Dacă rezonatorul este caracterizat prin valori $(g_1 \rangle 1,\ g_2 \langle 1)$ sau $(g_1 \langle 1,\ g_2 \rangle 1)$ se obţine aşa numitul rezonator *stabil concav-convex* (fig. 89). In cazul acestui rezonator "talia" fasciculului este poziţionată în afara rezonatorului, iar dimensiunea spotului este mare în orice plan (x, y) în interiorul rezonatorului. Aceşti rezonatori necesită oglinzi cu rază de curbură mare (dificil de fabricat şi testat) şi sunt sensibili la aliniere.

3.4 Rezonator confocal nestabil.

De asemenea se pot realiza rezonatori confocali, dar asimetrici, adică rezonatori în care cele două oglinzi au raze de curbură diferite (R_1, R_2), dar punctele focale ale acestora coincid. In acest caz se poate scrie relaţia:

(3.12) $\frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} = L$, care este echivalentă cu: $g_1 + g_2 = 2g_1g_2$.

In diagrama de stabilitate, punctele care satisfac această condiţie, se află în afara zonei haşurate (fig. 90) şi anume pe curbele punctate (ramura pozitivă, respectiv negativă a punctelor confocale), deci corespund unor rezonatori nestabili. Aceşti rezonatori prezintă interes în construcţia laserilor deoarece în cavitate un fascicul se propagă sub forma unui fascicul colimat şi apare sub aceeaşi formă la ieşirea din rezonator.

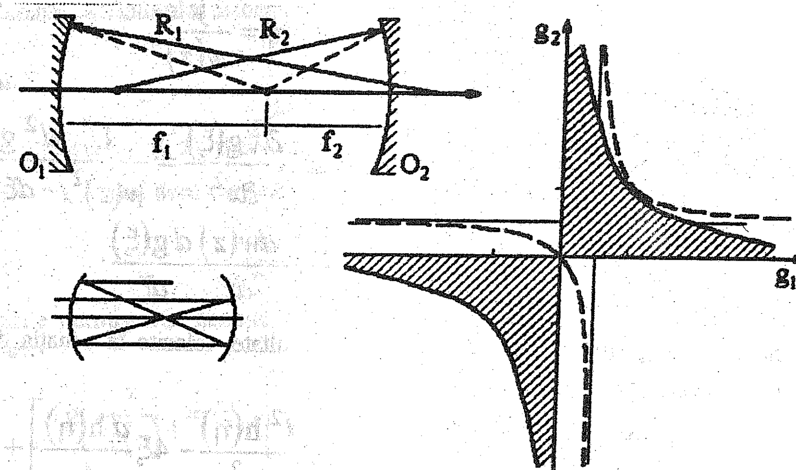


Fig. 90

4. Modurile de ordin superior ale unui rezonator optic.

Ecuaţia de undă paraxială, în afara soluţiilor de forma (2.13 a,b), este satisfăcută şi de alte tipuri de soluţii care includ forma (2.27) ca un caz particular. Pentru a stabili forma generală a soluţiilor, să acceptăm o soluţie de forma:

$$(4.1)\quad \tilde{E}(x,y,z) = N\, g\left[\frac{x}{w(z)}\right] h\left[\frac{y}{w(z)}\right] \exp[i\,P(z)] \exp\left[\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}\right],$$

unde semnificaţia mărimilor $q(z)$ şi $w(z)$ este descrisă de relaţiile (2.21, 2.23 b). Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

$$P(z) = p(z) \text{ şi } g\left[\frac{x}{w(z)}\right] = h\left[\frac{y}{w(z)}\right] = 1,$$

relaţia (4.1) se reduce la relaţia (2.27). Forma argumentului funcţiilor g şi h evidenţiază faptul că dimensiunea spotului $w(z)$ reprezintă un factor de scalare a distribuţiei intensităţii în spotul fasciculului descris de relaţia (4.1).

Pentru a rezolva problema propusă este necesar să se stabilească expresia funcţiilor g, h şi P în aşa fel încât forma (4.1) să fie o soluţie a ecuaţiei paraxiale. Dacă se notează:

$$(4.2)\qquad a)\ \ \xi=\frac{x}{w(z)}\quad \text{şi}\quad b)\ \ \eta=\frac{y}{w(z)},$$

atunci pot fi scrise relaţiile:

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial x}=\frac{d\,g(\xi)}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{w(z)}\frac{d\,g(\xi)}{d\xi},\ \text{de unde:}\ \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x^2}=\frac{1}{w(z)^2}\frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial z}=\frac{d\,g(\xi)}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{1}{w(z)^2}\frac{dw(z)}{dz}\frac{d\,g(\xi)}{d\xi}$$

şi în mod analog pentru funcţia $h(\eta)$. Aceste rezultate, folosite în ecuaţia de undă paraxială, conduc la ecuaţia:

$$\frac{1}{g(\xi)}\left[\frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2}-4\xi\frac{d\,g(\xi)}{d\xi}\right]+\frac{1}{h(\eta)}\left[\frac{d^2 h(\eta)}{d\eta^2}-4\xi\frac{d\,h(\eta)}{d\eta}\right]+$$

$$+\left(\frac{i2k}{q(z)}-2k\frac{d\,P(z)}{dz}\right)w(z)^2=0$$

Deoarece fiecare termen separat al acestei ecuaţii este funcţie de variabilele ξ, η, respectiv z, pentru a satisface ecuaţia este necesar ca fiecare să reprezinte o mărime constantă:

$$a)\quad \frac{1}{g(\xi)}\left[\frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2}-4\xi\frac{d\,g(\xi)}{d\xi}\right]=-a_1,$$

$$(4.3)\qquad b)\quad \frac{1}{h(\eta)}\left[\frac{d^2 h(\eta)}{d\eta^2}-4\xi\frac{d\,h(\eta)}{d\eta}\right]=-a_2,$$

$$c)\quad \left(\frac{i2k}{q(z)}-2k\frac{d\,P(z)}{dz}\right)w(z)^2=a_1+a_2.$$

Prin urmare problema rezolvării ecuaţiei de undă paraxiale se reduce la rezolvarea a trei ecuaţii diferenţiale ordinare (cu variabile separate).

Dacă se efectuează schimbarea de variabile:

$$(4.4)\qquad u=\sqrt{2}\xi,$$

atunci:

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial x}=\frac{d\,g(\xi)}{du}\frac{\partial u}{\partial \xi}=\sqrt{2}\frac{d\,g(\xi)}{du},\ \text{respectiv:}\ \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x^2}=2\frac{d^2 g(\xi)}{du^2},$$

obţinându-se o ecuaţie diferenţială de o formă cunoscută (întâlnită de ex. la rezolvarea problemei oscilatorului armonic în mecanica cuantică):

$$(4.5)\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2u\frac{d\,g}{du}+\frac{a_1}{2}g=0.$$

Ecuaţia (4.5) prezintă o soluţie finită pentru $u \to \infty$ ($\xi \to \infty$, adică $x \to \infty$), numai dacă constanta a_1 satisface condiţia:

$$\frac{a_1}{2}=2m,\ \text{unde:}\ m=0,1,2,\cdots$$

Soluţiile permise ale ecuaţiei (4.5) sunt reprezentate prin polinoamele Hermite, prin urmare:

$$(4.6)\qquad g\left[\frac{x}{w(z)}\right]=H_m\left[\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right],\quad h\left[\frac{y}{w(z)}\right]=H_n\left[\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right],$$

unde: $m,n=0,1,2,\cdots$

Relativ la funcţia $P(z)$, dacă se folosesc relaţiile (2.22, 2.24 a, 2.24 b), ecuaţia diferenţială (4.3 c) poate fi scrisă sub forma:

$$(4.7)\qquad \frac{d\,P(z)}{dz}=\frac{iz}{z_R^2+z^2}-\frac{z_R(m+n+1)}{z_R^2+z^2},$$

care conduce la:

$$(4.8\ a)\qquad P(z)=i\ln\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}-(m+n+1)\phi(z),$$

sau:

(4.8 b)

$$\exp[i\,P(z)]=\frac{\exp[-i(m+n+1)\phi(z)]}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}}=\frac{w_0}{w(z)}\exp[-i(m+n+1)\phi(z)]$$

Expresia fazorului componentei electrice, soluţie a ecuaţiei de undă paraxială, este:

(4.9)

$$E_{m,n}(x,y,z)=\frac{Nw_0}{w(z)}H_m\left[\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right]H_n\left[\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right]\times$$

$$\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right]\exp\left[\frac{i\,k\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}\right]\exp\left\{i\left[k\,z-(m+n+1)\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right]\right\}$$

Din această relaţie rezultă:

- dacă $m=n=0$, relaţia (4.9) conduce la relaţia (2.27) care descrie distribuţia câmpului în modul de oscilaţie fundamental (modul de "ordin zero");

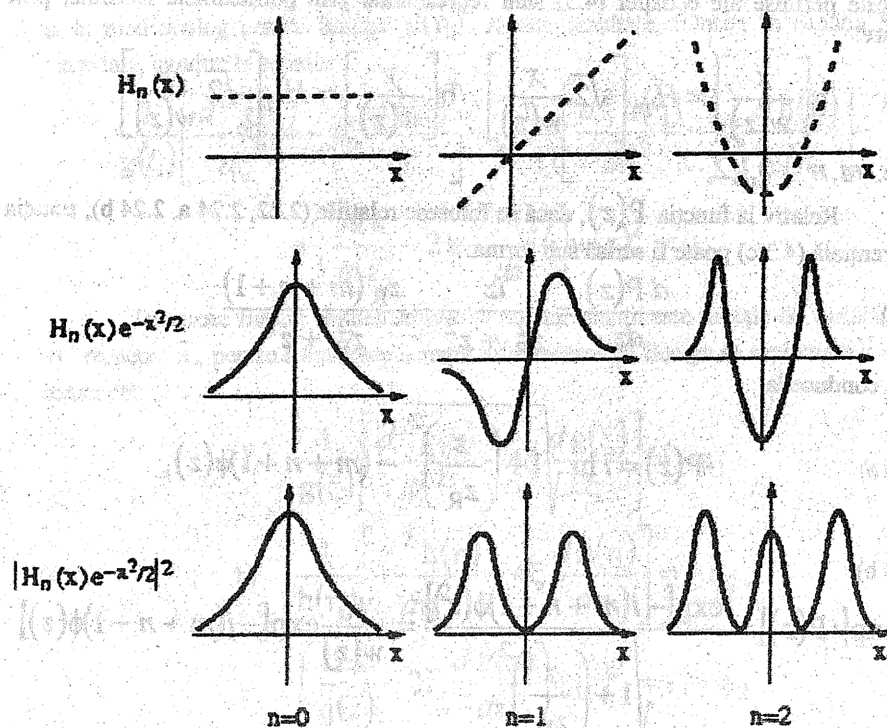


Fig. 91

- pentru fasciculul gaussian mărimile $R(z)$ şi $w(z)$ nu depind de ordinul m sau n; indiferent de ordin; fasciculele gaussiene sunt caracterizate prin aceeaşi parametrii $R(z)$ şi $w(z)$, prin urmare un fascicul gaussian de un ordin (m,n) dat, la propagarea prin spaţiul liber sau la transmiterea lui prin elemente optice, nu-şi modifică ordinul, ci numai parametrul $\tilde{q}(z)$;

- deoarece, pentru un rezonator optic dat, fasciculele gaussiene de diferite ordine (m,n) sunt caracterizate prin aceeaşi rază de curbură, iar dimensiunea spotului depinde numai de factorul de scalare, acestea pot reprezenta moduri de oscilaţie ale unui rezonator optic stabil, dacă satisfac condiţiile ($a_1, a_2 \rangle\rangle w_1, w_2$).

Modurile gaussiene caracterizate prin valori diferite (m,n) sunt cunoscute sub denumirea de *moduri transversale*, deoarece distribuţia intensităţii în spotul lor depinde de valorile (m,n), în timp ce modurile asociate la diferite valori q, pentru valori (m,n) date, nu depinde de valoarea q şi sunt cunoscute sub denumirea de *moduri logitudinale*. Aceste moduri se notează prin simbolul TEM_{qmn}.

Din relaţia (4.9) rezultă că mărimea fazorului fascicului gaussiano-sferic, pentru o pereche de numere (m,n), este determinată de forma corespunzătoare a polinoamelor lui Hermite. Expresia funcţiei care generează polinoamele Hermite are forma:

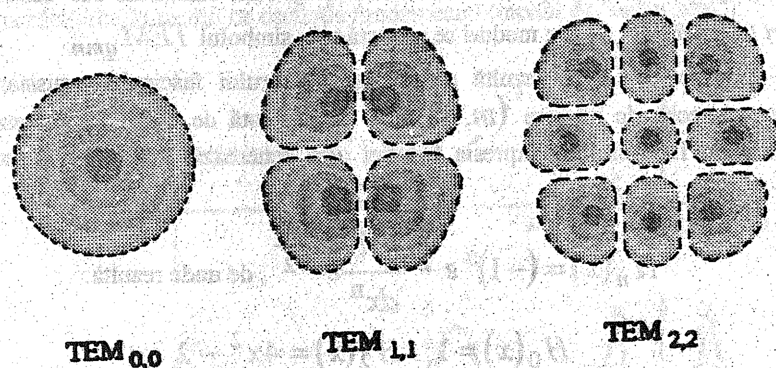
$$H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}$$, de unde rezultă:

$$H_0(x)=1,\quad H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_1(x)=2x,\quad H_3(x)=8x^3-12x.$$

In fig. 91 este prezentată, pentru valorile $n=0,1,2$, graficul funcţiei Hermite $H_n(x)$, precum şi cel al funcţiei $H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Deoarece experimental se măsoară o mărime proporţională cu pătratul fazorului intensităţii câmpului electric, în fig. 91 este prezentat şi graficul funcţiei $\left|H_n(x)e^{-x^2/2}\right|^2$. Atât din relaţia de definiţie, cât şi din imaginea grafică (fig. 91), rezultă că polinoamele Hermite marcate prin numere *pare* sunt *simetrice* faţă de variabila x, în timp ce cele marcate prin numere *impare* sunt *antisimetrice*. Cazului $(m=0,n=0)$ (fig. 92) îi corespunde modul de oscilaţie "cu ordinul cel mai mic", care corespunde modului gaussian prezentat în prg. 2. Un polinom Hermite de ordinul m este caracterizat prin m noduri, respectiv $(m\text{-}1)$ maxime (loburi), cele exterioare prezentând intensitatea maximă.

Intr-un plan (x,y), perpendicular la direcţia de propagare a fascicului (axa optică a rezonatorului), intensitatea energetică a fascicului corespunzător unui mod de oscilaţie de ordin superior reprezintă o combinaţie a distribuţiei intensităţilor pe cele două direcţii reciproc perpendiculare, corespunzător ordinilor polinoamelor Hermite (de ex. modurile TEM_{00}, TEM_{01} sau TEM_{10}, TEM_{11},...). Rezultatul acestor

combinații este prezentat în fig. 92 pentru modurile TEM_{00}, TEM_{11} și TEM_{22}. In această figură limita domeniului prezentat reprezintă distanța față de axa optică unde intensitatea energetică scade de e^2 ori față de intensitatea maximă. In cazul modului de oscilație TEM_{00} intensitatea maximă este localizată de-a lungul axei optice, iar în cazul celorlalte moduri (TEM_{11}, respectiv TEM_{22}) aceasta este localizată în interiorul "petelor" prezentate în fig. 92.



TEM 0,0 TEM 1,1 TEM 2,2

Fig. 92

Se observă că, de ex. distribuția intensității componentei electrice a câmpului *em* în interiorul rezonatorului optic, în cazul modului de oscilație TEM_{11}, prezintă două planuri nodale, reciproc perpendiculare (după axele x, respectiv y). Prin urmare în cazul acestui mod de oscilație structura câmpului din interiorul rezonatorului este formată din patru "fuse", fiecare fiind dispus în câte un cadran, despărțite de planurile nodale. In cazul modului TEM_{22} structura câmpului este mult mai complexă. De-a lungul axei optice apare un "fus" de intensitate mică (vezi fig. 91) însoțit de alte opt "fuse", toate fiind despărțite de două planuri nodale după direcția x, respectiv două plane nodale după direcția y.

Combinațiile de tipul TEM_{mn} (unde $m \neq n$) sunt mai complicate. Atrage atenția modurile TEM_{10} și TEM_{01} care se evidențiază prin combinația liniară $TEM_{10} + TEM_{01}$ (deoarece cele două moduri sunt degenerate după frecvență), care formează un mod circular simetric, cu un nod de-a lungul axei optice, cunoscut în literatură sub denumirea de "doughnut" ("cocă cu alune"). In general acesta este un mod de oscilație nedorit, de aceea se urmărește înlăturarea acestuia.

Modurile gaussiene prezintă o simetrie rectangulară, care, în cazul unor oglinzi cu secțiune circulară, apare ca fiind inacceptabilă. In practică, o mică dezaliniere a

oglinzilor sau prezența unor "perturbații" (de ex. prezența în rezonator a unor ferestre tip Brewster), conduce la formarea modurilor cu simetrie rectangulară, în defavoarea celor cu simetrie circulară.

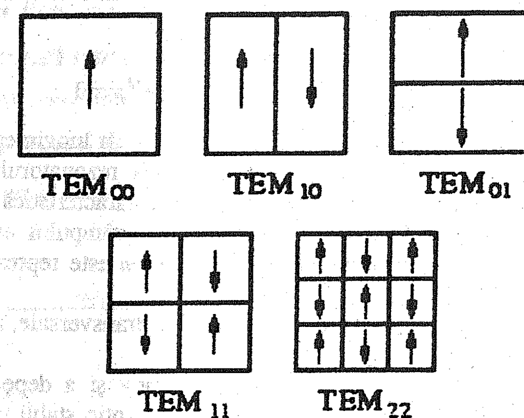


Fig. 93

In cazul simetriei rectangulare componenta electrică a câmpului *em* este liniar polarizată, direcția de acțiune a acestei componente fiind diferită în "fuse" diferite ale modului de oscilație. In fig. 93 este prezentată direcția de acțiune a componentei electrice în cazul modurilor TEM_{00}, TEM_{01}, TEM_{10}, TEM_{11} și TEM_{22}.

4.1 Frecvența modurilor de oscilație ale fasciculelor gaussiene

După cum s-a stabilit, un mod de oscilație reprezintă o distribuție spațială, staționară în timp, a puterii (a pătratului fazorului componentei electrice a câmpului *em*) formată în interiorul rezonatorului. Distribuția spațială reprezintă rezultatul interferenței celor două unde care se propagă în rezonator în sensuri opuse. Considerând drept referențial faza intensității câmpului componentei electrice reflectate la nivelul unei oglinzi, dacă după un ciclu dute-vino între oglinzile rezonatorului variația fazei este egală cu produsul dintre ordinul q (număr întreg) al modului de oscilație și valoarea 2π, atunci componenta electrică a câmpului *em* este în *rezonanță* cu cavitatea rezonatorului optic, iar în rezonator, ca rezultat al interferenței, se formează distribuția spațială staționară în timp, cunoscută sub denumirea de *undă staționară*.

Condiția de rezonanță se poate scrie sub forma:

(4.10) $$2k_q L = q2\pi, \text{ de unde: } L = q\frac{\lambda_q}{2} = q\frac{\pi c}{\omega_q}$$

Frecvența modului de oscilație (a componentei electrice a câmpului *em* care este în rezonanță cu cavitatea rezonatorului) este:

(4.10') $$\nu_q = q\frac{c}{2L} = q\Delta\nu_{axial},$$

deoarece intervalul, exprimat în unităţi de frecvenţă, dintre frecvenţa a două moduri vecine este:

(4.11) $$\nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} = \Delta\nu_{axial}.$$

Intervalul în frecvenţă este cu atât mai mic cu cât lungimea rezonatorului este mai mare şi, după cum se cunoaşte, dacă lungimea rezonatorului tinde la infinit, structura discretă în frecvenţă a modurilor de oscilaţie caracteristică rezonatorului finit, trece în structura continuă a modurilor caracteristică câmpului *em* extins în spaţiul infinit. In acest caz un mod de oscilaţie al câmpului *em* este reprezentat printr-o undă armonică, de diferite tipuri.

Să analizăm frecvenţa modurilor de oscilaţie transversale, ataşate unui mod de oscilaţie axial.

Din cauza existenţei deplasării de fază Guoy şi a dependenţei acesteia de ordinul modului hermitic-gaussian, într-un rezonator optic stabil, moduri transversale diferite prezintă frecvenţe de rezonanţă diferite. Să stabilim expresia frecvenţei unui mod rezonant tranversal (m,n) care aparţine unui mod axial q.

Diferenţa dintre faza câmpului fasciculului hermitic-gaussian la nivelul unei oglinzi faţă de cea de la nivelul celeilalte oglinzi este:

(4.12) $$\phi(z_2) - \phi(z_1) = kL - (m+n+1)[\Psi(z_2) - \Psi(z_1)],$$

unde: $\tan\Psi(z_i) = \dfrac{z_i}{z_R}$.

Dacă se folosesc expresiile (3.3) de poziţionare ale oglinzilor rezonatorului faţă de "talie", precum şi expresia domeniului Rayleigh, se poate arăta că variaţia totală a fazei Guoy, de-a lungul lungimii rezonatorului este dată de relaţia:

$$\Psi(z_2) - \Psi(z_1) = \arccos\left(\pm\sqrt{g_1 g_2}\right),$$

unde semnul $(+)$ se aplică rezonatorilor pentru care $(g_1, g_2 > 0)$, iar semnul $(-)$ celor pentru care $(g_1, g_2 < 0)$.

Condiţia de rezonanţă pentru unda staţionară ce se formează în cavitate, implică faptul că diferenţa fazelor câmpului la nivelul celor două oglinzi trebuie să fie egală cu un număr întreg de π:

$$\frac{\omega_{q,m,n} L}{c} - (m+n+1)\arccos\left[\pm\sqrt{g_1 g_2}\right] = q\pi,$$

de unde frecvenţa modului de oscilaţie transversal, care aparţine familiei modului axial q, este:

(4.13) $$\omega_{q,m,n} = \left[q + (m+n+1)\frac{\arccos\left[\pm\sqrt{g_1 g_2}\right]}{\pi}\right]\frac{\pi c}{L}.$$

Prin urmare fiecărui mod axial q îi aparţine o familie de moduri transversale (m,n) a căror frecvenţă este dată de relaţia (4.13). Frecvenţa acestor moduri, faţă de cea a modului axial, creşte odată cu creşterea numerelor (m,n), dacă parametrii rezonatorul îndeplinesc condiţia $g_1, g_2 > 0$, şi se micşorează cu creşterea aceloraşi numere, dacă parametrii îndeplinesc condiţia $g_1, g_2 < 0$ (fig. 94 a,b).

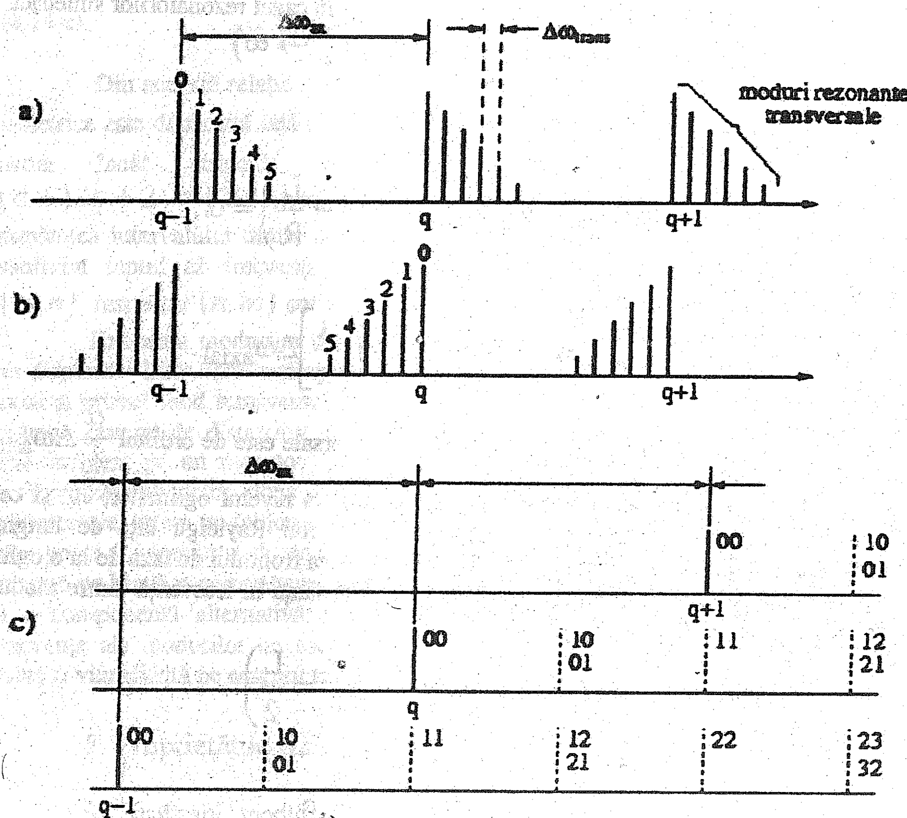


Fig. 94 a,b,c

Intervalul de frecvenţă dintre două moduri transversale succesive:

$$\frac{\arccos\left[\pm\sqrt{g_1 g_2}\right]}{\pi}\Delta\omega_{axial},$$

este determinat de valoarea parametrilor g_1, g_2, deci de construcţia rezonatorului.

Conform celor prezentate mai sus, deplasarea Guoy a fazei, funcţie de tipul rezonatorului este:

$$\frac{\arccos\left[\pm\sqrt{g_1 g_2}\right]}{\pi} \cong \begin{cases} 0 & \text{rezonator "aproape planar" } g_1, g_2 \to 1 \\ \frac{1}{2} & \text{rezonator "aproape confocal" } g_1, g_2 \to 0 \\ 1 & \text{rezonator "aproape concentric" } g_1, g_2 \to -1 \end{cases}$$

Să analizăm frecvenţa modurilor transversale în cazul rezonatorilor simetrici.

Cazul rezonatorului aproape planar $(R_1, R_2 \to \infty)$.

Deoarece $\frac{L}{R} \langle\langle 1$, se poate considera:

$$\arccos\left[\sqrt{g_1 g_2}\right] \cong \arccos\left(1-\frac{L}{R}\right) = \alpha,$$

unde $\alpha \langle\langle \pi$, deci:

(4.14 a) $$\omega_{q,m,n} = \left[q + (m+n+1)\frac{\alpha}{\pi}\right]\Delta\omega_{axial}.$$

Intervalul dintre frecvenţa modurilor transversale este de ordinul $\frac{\alpha}{\pi}\Delta\omega_{axial}$.

In cazul acestui rezonator atât dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor, cât şi cea a "taliei" sunt mari, corespunzător, mărimea domeniului Rayleigh faţă de lungimea rezonatorului va fi mare. Conform fig. 80, la deplasarea frontului de fază de la o oglindă la alta, variaţia Guoy a fazei este mică, respectiv distanţa în frecvenţă dintre modurile succesive este mică.

Cazul rezonatorului concentric $\left(R_1 = R_2 = \frac{L}{2}\right)$.

Deoarece $g_1 = g_2 = -1$, se obţine:

$$\arccos\left[\sqrt{g_1 g_2}\right] = 0,$$

iar frecvenţa modurilor transversale de rezonanţă devine:

(4.14 b) $$\omega_{q,m,n} = q\Delta\omega_{axial}.$$

Dacă se consideră rezonatorul aproape concentric se poate afirma că lungimea rezonatorului este mult mai mare decât "talia" fasciculului gaussian (care tinde la zero). De aceea se poate accepta faptul că în acest caz, la deplasarea frontului de fază de la o

oglindă la alta, trecând prin zona "taliei", variaţia fazei Guoy este aproape completă (egală cu π), ceea ce implică faptul că valoarea funcţiei cos trebuie să fie egală cu (-1) (fig. 80). Din această cauză, conform relaţiei (4.13), în acest caz, frecvenţa modurilor transversale este situată faţă de frecvenţa modului axial q spre frecvcenţe mai mici.

Cazul rezonatorului confocal $(R_1 = R_2 = L)$, adică $g_1 = g_2 = 0$, de unde:

$$\arccos\left[\sqrt{g_1 g_2}\right] = \frac{\pi}{2},$$

iar frecvenţa modului de rezonanţă este dată de relaţia:

(4.14 c) $$\omega_{q,m,n} = \left[q + \frac{m+n+1}{2}\right]\Delta\omega_{axial}.$$

Din această relaţie se observă că în acest caz frecvenţa modurilor transversale simetrice este deplasată faţă de frecvenţa modului axial q cu valori întregi $\Delta\omega_{axial}$, astfel încât coincide exact cu frecvenţa modului axial următor $(q+1, q+2, q+3,...)$, în timp ce modurile transversale nesimetrice sunt situate la jumătatea intervalului dintre două moduri succesive (fig. 94 c). De asemenea trebuie subliniat faptul că frecvenţa modurilor transversale caracterizate prin combinaţia (m,n), respectiv (n,m) sunt egale, deci aceste moduri sunt degenerate.

Existenţa modurilor de oscilaţie a fost evidenţiată experimental. Se consideră un dispozitiv laser care oscilează simultan pe două moduri de oscilaţie (de ex. un mod axial şi primul mod transversal sau două moduri transversale succesive). Fasciculul de radiaţie generat de dispozitiv, care conţine radiaţie cu frecvenţele celor două moduri, este incident pe un receptor de radiaţie suficient de rapid. Deoarece radiaţia optică corespunzătoare celor două moduri prezintă un grad înalt al coerenţei spaţiale şi transversale, apare un tablou de interferenţă stabil corespunzător fenomenului de bătăi, care poate fi înregistrat de detector. Semnalul electric de la ieşirea fotodetectorului va conţine pe lângă o componentă continuă, proporţională cu intensitatea fasciculului laser, şi o componentă alternativă a cărei frecvenţă este egală cu diferenţa celor două frecvenţe ale modurilor de oscilaţie. Deoarece valoarea diferenţei este mică, aceasta poate fi vizualizată pe ecranul unui osciloscop.

5. Proprietăţile fizice ale fascicului gaussian.

Să analizăm modificarea parametrilor fascicului gaussian la propagarea acestuia prin sisteme optice (diafragme, lentile, s.a).

5.1 Diafragmarea unui fascicul gaussian.

Considerăm că un fascicul gaussian este diafragmat de o deschidere circulară cu raza r, dimensiunea spotului fasciculului la nivelul diafragmei fiind egală cu w. Să analizăm valoarea fluxului (puterii) fasciculului ce trece prin diafragmă funcţie de valoarea razei deschiderii diafragmei. Puterea fasciculului este dată de relaţia:

(5.1) $$P = \iint \left|\widetilde{u}(r)\right|^2 dA,$$

iar distribuţia radială a intensităţii energetice a fasciculului gaussian caracterizat prin dimensiunea spotului w este:

(5.2) $$I(r) = \frac{2P}{\pi w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}.$$

Pe baza acestor relaţii pot fi analizate mai multe cazuri.

- *cazul fasciculului echivalent "top hat"*. Considerăm un fascicul cilindric ataşat fasciculului gaussian pentru care valoarea intensităţii energetice în orice punct al secţiunii transversale este egală cu valoarea maximă a fasciculului gaussian. Să calculăm diametrul secţiunii fascicului cilindric astfel încât puterea totală care traversează această secţiune să fie egală cu puterea totală a fasciculului gaussian. Acest fascicul este cunoscut sub denumirea de *fascicul echivalent* "top hat" (fig. 95).

In acest caz se obţine:

$$d_{TH} = 2r_{TH} = \sqrt{2}w, \text{ respectiv: } A_{TH} = \pi r_{TH}^2 = \frac{\pi w^2}{2}.$$

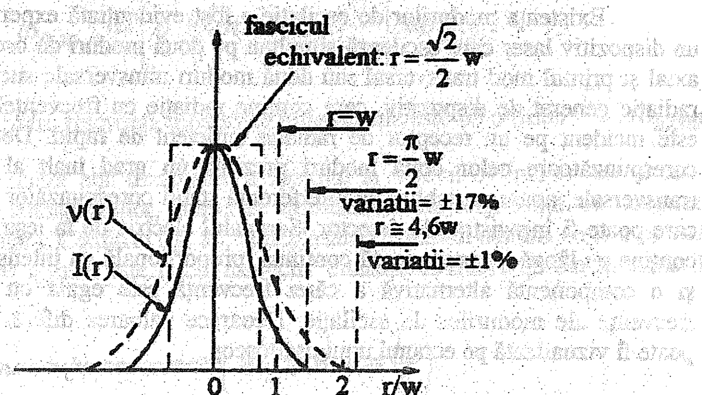


Fig. 95

- *diametrul* $(2a)$ *al unei diafragme* care permite trecerea unui anumit procent din puterea fasciculului gaussian caracterizat prin dimensiunea w a spotului. Diafragma va obtura domeniul de margine ("aripile") a fasciculului gaussian.

(5.3) $$P_{\text{transmis}} = \frac{2}{\pi w^2}\int_0^a e^{-\frac{2r^2}{w^2}} 2\pi r\, dr = 1 - e^{-\frac{2a^2}{w^2}}$$

Relaţia (5.3) este prezentată grafic în fig. 96.

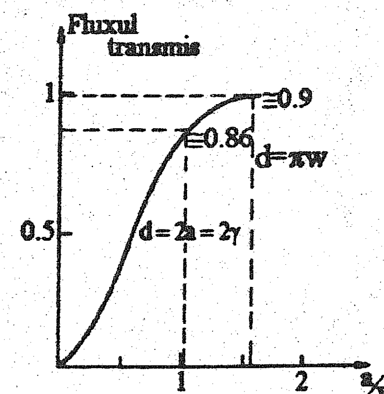


Fig. 96

Dacă $d = 2a = 2w$ (deschiderea diafragmei se suprapune peste locul geometric al fascicului în care valoarea amplitudinii scade de e ori faţă de valoarea maximă), puterea transmisă reprezintă $\cong 0{,}86$ din puterea totală ("criteriul $1/e$"). Dacă $2a = \pi w$, puterea transmisă reprezintă $\cong 0{,}99$, iar dacă $2a = 3w$ puterea transmisă reprezintă $\cong 0{,}989$ din puterea fasciului incident.

La transmiterea unui fascicul printr-o diafragmă (în acest caz - o diafragmă circulară) trebuie considerat fenomenul de difracţie pe această deschidere. Acest fenomen determină variaţii ale distribuţiei intensităţii în spotul fascicului transmis. Valoarea relativă a variaţiei depinde de mărimea diametrului deschiderii. Dacă $2a \geq 4{,}6w$ valoarea relativă scade sub $\pm 1\%$.

5.2 Propagarea fascicului gaussiano-sferic prin sisteme optice.

a) In cele prezentate în prg. 2.3, s-a stabilit că la propagarea unui fascicul gaussian, în spaţiul liber, nu se modifică caracteristicile acestuia. Valoarea dimensiunii spotului şi a razei de curbură se modifică conform relaţiilor (2.24 a), respectiv (2.24 b), dar se menţine forma de undă sferică. Aceste relaţii rezultă din relaţia (2.20) care reprezintă *legea de propagare* a parametrului $\widetilde{q}$ al fasciculului gaussian. Această lege descrie efectul propagării în spaţiul liber, adică printr-un "*element optic*" reprezentat de spaţiul liber delimitat de două planuri z_1, respectiv z_2 distanţate prin intervalul z,

dispuse perpendicular la direcţia de propagare. Dacă în planul z_1 fasciculul gaussian este caracterizat prin parametrul q_1, iar în planul z_2 prin parametrul q_2, între acestea există relaţia (fig. 97 a'):

(5.4) $$\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 + (z_2 - z_1).$$

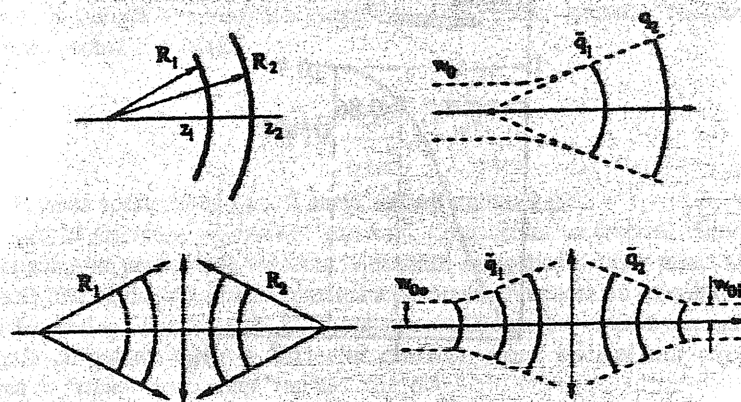


Fig. 97 a,b

Acestui element optic i se poate ataşa matricea de transfer de forma:

(5.5) $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

care permite identificarea coeficienţilor A, B, C şi D.

Proprietăţile undei gaussiano-sferice reprezintă o generalizare a undelor sferice ordinare. Dacă raza de curbură a unei unde sferice, în planul z_1 este gală cu R_1, atunci în planul z_2, raza are valoarea (fig. 97 a):

(5.4') $$R_2 = R_1 + (z_2 - z_1).$$

b) *Propagarea printr-o lentilă subţire.* O undă sferică ordinară care se propagă printr-o lentilă subţire a cărei distanţă focală este f, îşi modifică raza de curbură a frontului de fază conform relaţiei punctelor conjugate ale lentilelor subţiri (fig. 97 a):

(5.6) $$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}.$$

Prin deschiderea lentilei este transmisă partea din frontul de fază care corespunde aperturii acesteia (fluxul de energie care corespunde acestei aperturi), caracterizat prin raza de curbură R_1; după lentilă raza de curbură a frontului de fază devine R_2, schimbându-şi semnul funcţie de caracteristicile fasciculului de raze optice.

Să analizăm efectul acţiunii aceleaşi lentile subţiri asupra unui fascicul gaussian, a cărui dimensiune a "taliei" este w_{01}. Dimensiunea spotului şi raza de curbură reală a fasciculului gaussian în faţa lentilei sunt w_1, respectiv R_1. Deoarece la trecerea prin lentilă nu se poate modifica distribuţia transversală a intensităţii energetice în spotul fasciculului, imediat după lentilă, dimensiunea spotului trebuie să fie egală tot cu w_1, însă se modifică raza de curbură a frontului de undă sferic, care devine egală cu R_2. In mod corespunzător se modifică dimensiunea "taliei", care devine egală cu w_{02}. Raportul $\frac{w_{02}}{w_{01}}$, corespunde măririi transversale a lentilei (fig. 97 b').

Raza de curbură reală a frontului de fază se poate determina pe baza relaţiei dintre punctele conjugate ale lentilei. Distribuţia fazei pe frontul de undă dispus imediat în faţa lentilei este aceeaşi cu a unui front de undă generat de o sursă punctiformă, dispusă pe axa optică, la distanţa $z_{obiect} = R_1$ faţă de lentilă, în stânga acesteia (spaţiul obiect). Lentila va forma imaginea acestuia, în spaţiul imagine, într-un punct dispus pe axa optică la distanţa $z_{imagine} = -R_2$, între cele două distanţe existând relaţia (5.6), în care s-a considerat convenţia de semn $R_1 > 0$, respectiv $R_2 < 0$. Folosind relaţia (2.22), se poate exprima raza complexă de curbură $\tilde{q}_2$ a fasciculului gaussian după trecerea prin lentilă, funcţie de raza complexă de curbură a frontului undei din faţa lentilei:

$$\frac{1}{\tilde{q}_1} = \frac{1}{R_1} - i\frac{\lambda}{\pi w_1^2}, \text{ iar după lentilă: } \frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{R_2} - i\frac{\lambda}{\pi w_2^2}.$$

Deoarece $w_1 = w_2$, pe baza relaţiei (5.6), se obţine:

$$\frac{1}{\tilde{q}_1} - \frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{f}, \text{ de unde:}$$

(5.7) $$\tilde{q}_2 = \frac{\tilde{q}_1}{-\frac{1}{f}\tilde{q}_1 + 1}.$$

Relaţia (5.7), asemănător cu relaţia (5.4), reprezintă legea de propagare a razei complexe de curbură printr-o lentilă subţire, caracterizată prin matricea de transfer:

(5.8) $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

c) *Cazul propagării pe o distanţă d, după care acţionează o lentilă.* In acest caz, matricea de transfer are forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f} & -\frac{L}{f}+1 \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

şi se obţine:

$$\tilde{q}_2 = \frac{\tilde{q}_1 + L}{-\frac{1}{f} + 1 - \frac{L}{f}}. \tag{5.10}$$

d) *Rezonatori optici care conţin în cavitate elemente optice.* Modurile gaussiene stabile se pot forma şi în rezonatori mai complecşi, de ex. rezonatori care conţin lentile, rezonatori circulari, care prezintă mai mult de două oglinzi, sau rezonatori cu interfeţe interne dielectrice. Problema stabilirii profilului corect al fasciculului gaussian care să îndeplinească toate condiţiile frontului de undă este mai complicată decât în cazul rezonatorului simplu format din două oglinzi, dar poate fi rezolvată prin următoarea metodă.

Sistemului optic complex, în aproximaţia fasciculului paraxial, i se poate ataşa matricea de transfer $[A, B, C, D]$ (fig. 98 a). Legătura dintre parametrii razei optice la ieşirea din sistem şi cei de la intrarea este de forma:

$$r_2 = Ar_1 + Br_1' \text{ şi } r_2' = Cr_1 + Dr_2'.$$

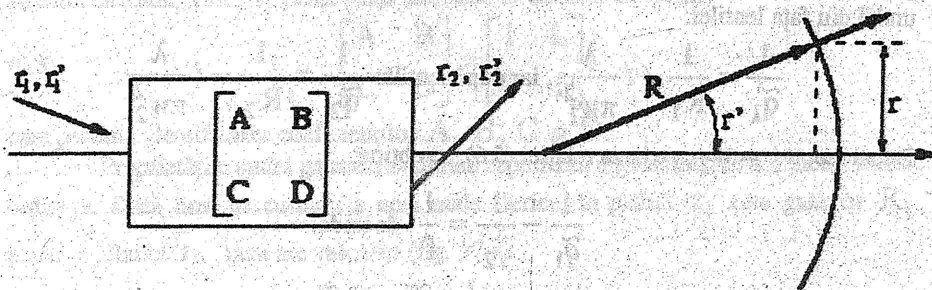


Fig. 98 a,b

Să analiză propagarea prin acest sistem a unei unde sferice ideale. Deoarece raza optică reprezintă un vector normal la frontul de fază (de undă), legătura dintre raza de curbură R a frontului de fază şi parametrii r şi r' ai razei optice este de forma (fig. 98 b):

$$r' = \frac{r}{R}, \text{ adică } R = \frac{r}{r'}.$$

Considerând aceste relaţii, pentru frontul de undă sferic emergent din sistemul optic, se poate scrie:

$$R_2 = \frac{r_2}{r_2'} = \frac{Ar_1 + Br_1'}{Cr_1 + Dr_1'} = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}. \tag{5.11}$$

Conform celor prezentate mai sus, cel puţin pentru propagarea în spaţiul liber sau prin lentile subţiri, raza de curbură complexă $\tilde{q}$ se supune aceloraşi legi ale propagării ca şi raza geometrică a frontului de undă. Se poate accepta că relaţia de forma (5.11) se menţine pentru *orice* sistem optic dacă mărimea $\tilde{q}$ substituie pe R. Deci între propagarea razei optice în conceptul opticii geometrice şi cea a fasciculului gaussiano-sferic, care include natura ondulatorie a radiaţiei optice, există o legătură strânsă.

Prin urmare dacă un fascicul gaussiano-sferic, caracterizat prin raza complexă de curbură $\tilde{q}_1$ este incident pe un sistem optic caracterizat prin matricea de transfer $[A, B, C, D]$, raza de curbură complexă a fasciculului gaussiano-sferic emergent este dată de relaţia:

$$\tilde{q}_2 = \frac{A\tilde{q}_1 + B}{C\tilde{q}_1 + D}. \tag{5.12}$$

Caracteristicile unui mod de oscilaţie gaussian a oricărui rezonator optic, pentru care se cunoaşte matricea $[A, B, C, D]$, pot fi stabilite în modul următor. Pentru un mod gaussian stabil, caracterizat într-un punct dat al rezonatorului prin raza de curbură complexă $\tilde{q}_1$, după un ciclu complet dute-vino, în acelaşi punct, trebuie să se obţină $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1$, adică:

$$\tilde{q}_2 = \frac{A\tilde{q}_1 + B}{C\tilde{q}_1 + D} = \tilde{q}_1, \tag{5.13}$$

condiţie care conduce la relaţia:

$$\tilde{q}_1 = \frac{(A-D) \pm \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{2C}$$

Această relaţie, dacă se foloseşte proprietatea: $AD - BC = 1$, conduce la (s-a considerat semnul $+$):

$$\frac{1}{\tilde{q}_1} = \frac{A-D}{2B} - i\sqrt{\frac{4-(A+D)^2}{4B^2}} = \frac{1}{R_1} - i\frac{\lambda}{w_1^2}. \tag{5.14}$$

Deoarece dimensiunea w_1 a modului stabil este reală, trebuie îndeplinită condiţia:

$$\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 \leq 1.$$

In aceste condiţii raza reală de curbură a frontului de fază R_1 şi dimensiunea spotului w_1, într-un punct dat al rezonatorului vor fi date de relaţia (5.14).

BIBLIOGRAFIE

1. A.E. SIEGMAN, "*Lasers*", University Science, Mill Valey, Calif., 1986

A.E. SIEGMAN, "*An Introduction to Lasers and Masers*", McGraw-Hill, 1971

A.E. SIEGMAN, "*Microwave Solid-State Masers*", McGraw-Hill, 1964

2. Peter W. MILONNI, Joseph H. EBERLY, "*Lasers*", John Wiley and Sons, N.Y., 1988

3. HAKEN, "Light – vol. 1: *Wave, Photons, Atoms*; vol. 2: *Laser Light Dynamics*", North-Holland, 1981

4. C.O. WEISS, R. VILASECA, "*Dynamics of Lasers*", VCH, Weinheim-New York-Basel-Cambridge, 1991

5. W. KOECHNER, "*Solid-State Laser Engineering*"; Springer-Verlag, 1976

6. Murray SARGENT III, Marlan O. SCULLY, Willis E. LAMB Jr., "*Laser Physics*", Addison-Wesely, 1974

7. A. MAITLAND, M.H. DUNN, "*Laser Physics*", North-Holland, 1969

8. Orazio SVELTO, "*Principles of Lasers*", Plenum Press, 1976

9. William S.C. CHANG, "*Principles of Quantum Electronics – Lasers: Theory and Applications*", Addison-Wesely, 1969

10. A. ORSZAG, "*Les Lasers*", Masson &Cie", 1968

11. Dan C. Dumitraş, "*Laseri cu gaz*", Ed. Acad. Române", 1982

12. V. POP, "*Bazele opticii*", Ed. Univ. "Al. I. Cuza"-Iaşi, 1989

TIPARUL EXECUTAT LA
CENTRUL DE MULTIPLICARE AL
EDITURII UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA"
6600 Iași, Str. Păcurari nr. 9, tel. 032-114947

Format: 70×100/16
Coli tipo: 22,25
Apărut: 2001
Comanda: 38

